TS Devoir commun de Mathématiques n°3

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

SUJET SPÉCIALITÉ

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; −1 ; 3).
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.
   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t-2 \\ y = t \\ z = 3t+2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
   c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

Chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier soigneusement.

1°) La forme exponentielle du complexe $z = \dfrac{3+\sqrt{3}i}{2i}$ est $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2°) L'équation $\bar{z} = iz$ possède une unique solution.

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A, B et C dont les affixes sont : $z_A=-2$, $z_B=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ *et* $z_C=3+i\sqrt{3}$ forment un triangle équilatéral.

Exercice 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$

5. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :
c, d et *p* sont des nombres réels

Initialisation :
Affecter à c la valeur 0
Affecter à d la valeur 1

Traitement :
Tant que d – $c > 0{,}1$
    Affecter à p la valeur $\frac{1}{2}(c+d)$
    Si $f(p)<2$ alors Affecter à c la valeur p
    Sinon Affecter à d la valeur p
    Fin de Si
Fin de Tant que

Sortie :
Afficher c
Afficher d

1. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau donné en annexe.

2. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

Partie B

m désigne un nombre réel quelconque. On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$par :

$$g_m(x) = x+1-m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan.

1. a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).

Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+1$ suivant les valeurs du réel m.

4. a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_\mathrm{e}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_\mathrm{e}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : **5 points**

Pour les candidats ayant suivi la spécialité Mathématiques

Les calculs matriciels peuvent être effectués à la calculatrice.

Trois marques de shampoing X, Y et Z occupent un secteur de consommation. Chaque mois, les consommateurs de la population étudiée utilisent une et une seule de ces marques.

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.

Une étude faite sur une période d'essai a donné les estimations suivantes :

- si un consommateur utilise la marque X un mois donné, il l'utilise encore le mois suivant dans 40% des cas, dans 30% des cas, il opte pour la marque Y et, dans 30% des cas, il opte pour la marque Z.

- si un consommateur utilise la marque Y un mois donné, il l'utilise encore le mois suivant dans 40% des cas, dans 30% des cas, il opte pour la marque X et, dans 30% des cas, il opte pour la marque Z.

- si un consommateur utilise la marque Z un mois donné, il l'utilise encore le mois suivant dans 70% des cas, dans 20% des cas, il opte pour la marque X et, dans 10% des cas, il opte pour la marque Y.

Soit n un entier naturel.

Pour un consommateur pris au hasard, on note x_n , y_n et z_n les probabilités respectives des événements $\mathbf{X}_n$: « la marque X est utilisée le n-ième mois», $\mathbf{Y}_n$: « la marque Y est utilisée le n-ième mois» et $\mathbf{Z}_n$: « la marque Z est utilisée le n-ième mois».

Au cours du mois d'essai $(n=0)$, on a observé les valeurs initiales $x_0=0{,}1$; $y_0=0{,}2$ et $z_0=0{,}7$

1. a. Justifier l'égalité matricielle suivante à l'aide d'un arbre de probabilités :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

b. On pose $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. En utilisant la valeur de la somme $x_n+y_n+z_n$, montrer que l'on a $\mathbf{U}_{n+1}=\mathbf{A}\mathbf{U}_n+\mathbf{B}$ avec $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.

2. Soit la matrice $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a. Vérifier que P est inversible et préciser $\mathbf{P}^{-1}$.

b. Calculer $\mathbf{D}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ et préciser $\mathbf{D}^n$.

c. Montrer que $\mathbf{A}=\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{A}^n=\mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$

d. Calculer $\mathbf{A}^n$.

3. a. Soit I la matrice identité d'ordre 2, montrer que $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ est inversible.

b. En utilisant la question précédente, déterminer la matrice C telle que $\mathbf{C}=\mathbf{A}\mathbf{C}+\mathbf{B}$

4. a.Pour tout entier naturel n, on pose $\mathbf{V}_n=\mathbf{U}_n-\mathbf{C}$, démontrer que $\mathbf{V}_n=\mathbf{A}^n\mathbf{V}_0$.

b. En déduire l'expression de $\mathbf{U}_n$ en fonction de $\mathbf{A}^n$ et C puis l'expression de x_n et y_n en fonction de n et des valeurs initiales x_0 et y_0 .

5. Déterminer les limites des suites (x_n), (y_n) et (z_n). Ces limites dépendent-elles de la situation initiale ?

Que conclure sur l'utilisation, à long terme, des marques de shampoing X, Y et Z ?

NOM :

Annexe Exercice 3

à rendre avec la copie

Partie A :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5
c	0				
d	1				
$d - c$					
p					

Partie B :