BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2012

MATHEMATIQUES

-SERIE S-

SPÉCIALITÉ

DUREE DE L'EPREUVE : 4 heures

Matériel autorisé : Calculatrice graphique programmable

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.
Les candidats doivent traiter les trois exercices.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

- Ce sujet comporte 3 pages –

<u>Exercice 1 :</u> (5 points) ***(Spécialité)***

Rappel :

Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b$ (modulo 7), lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7\,k$.

1°) *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances.*

a) Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que si $a \equiv b$ (modulo 7) et $c \equiv d$ (modulo 7) alors $ac \equiv bd$ (modulo 7)

b) En déduire que, pour a et b entiers relatifs non nuls :

si $a \equiv b$ (modulo 7) alors pour tout entier naturel n : $a^n \equiv b^n$ (modulo 7)

2°) Pour $a = 2$, puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1$ (modulo 7).

3°) Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a) Montrer que $a^6 \equiv 1$ (modulo 7)

b) On appelle ordre de a modulo 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ (modulo 7).

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1$ (modulo 7).

En déduire que k divise 6.

Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c) Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers compris entre 2 et 6.

4°) À tout entier naturel n, on associe le nombre :

$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

Montrer que $A_{2012} \equiv 6$ (modulo 7)

<u>Exercice 2 :</u> (4 points)

<u>Partie A :</u>

<u>Questions de cours</u> :

Démontrer que pour tout complexe non nul, le conjugué de son inverse est l'inverse de son conjugué.

<u>Partie B :</u>

Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifiez soigneusement.

1°) La fonction exponentielle est la seule fonction dont la dérivée est elle-même.

2°) Pour tout complexe z, la partie imaginaire du complexe iz est la partie réelle de z.

3°) Si (u_n) est une suite strictement croissante alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4°) Soit (v_n) une suite. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^{-v_n}$

a) Si la suite (v_n) est arithmétique alors la suite (u_n) est géométrique.

b) Si la suite (v_n) diverge vers $+\infty$ alors la suite (u_n) est divergente.

c) Si pour tout n entier naturel, $v_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ alors la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 3 : (11 points)

Partie A : Résolution de l'équation différentielle : $y'-2y = xe^x$ (1)

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'-2y=0$ (2) .

2. Soient a et b deux réels et soit u une fonction définie sur ℝ par : u(x)= $(ax+b)e^x$

   a. Déterminer a et b pour que la fonction u soit solution de l'équation (1).
   b. Montrer que v est solution de l'équation différentielle (2) si, et seulement si, u + v est solution de l'équation (1).
   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Étude de la fonction auxiliaire *g* :

La fonction g est définie sur ℝ par : $g(x)=2e^x-x-2$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$, puis celle en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.

3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions réelles.
   Vérifier que 0 est l'une de ces deux solutions.
   Donner un encadrement au dixième de l'autre solution que l'on notera α.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie C : Étude de la fonction principale *f* :

La fonction f est définie sur ℝ par : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$, puis celle en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et, montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Étudier le sens de variation de f.

3. Montrer que $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ où α est définie dans la partie B

   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

4. On note C_f la courbe représentant la fonction f.
Déterminer une équation de (T) tangente à C_f au point d'abscisse 1 (Tous les coefficicents seront donnés sous forme exacte).
5. Tracer (T), la courbe C_f et ses tangentes horizontales dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm) .

Partie D : Détermination d'une primitive particulière de *f* :

1. Soit h la fonction définie sur ℝ par : $h(x)=xe^x$
   Déterminer une expression de sa dérivée $h'(x)$.
2. On note F la primitive de f définie sur ℝ telle que $F(0)=3$.
   Déterminer une expression de $F(x)$.