TS Devoir commun de Mathématiques n°3

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

SUJET SPÉCIFIQUE

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; −1 ; 3).
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.
   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   b. Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lll} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
   c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

Chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier soigneusement.

1°) La forme exponentielle du complexe $z=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2i}$ est $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

2°) L'équation $\bar{z}=iz$ possède une unique solution.

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A, B et C dont les affixes sont :
$z_A=-2,\quad z_B=4e^{-i\frac{\pi}{3}}\quad et\quad z_C=3+i\sqrt{3}$ forment un triangle équilatéral.

Exercice 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)e^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$

5. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :
c, d et p sont des nombres réels

Initialisation :
Affecter à c la valeur 0
Affecter à d la valeur 1

Traitement :
Tant que d – c > 0,1
    Affecter à p la valeur $\frac{1}{2}(c+d)$
    Si $f(p)<2$ alors Affecter à c la valeur p
    Sinon Affecter à d la valeur p
    Fin de Si
Fin de Tant que

Sortie :
Afficher c
Afficher d

1. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau donné en annexe.

2. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

Partie B

m désigne un nombre réel quelconque. On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$par :

$$g_m(x) = x+1-me^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan.

1. a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}$, et $\mathscr{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+1$ suivant les valeurs du réel m.
4. a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_e$, $\mathscr{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.
   b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_e$, $\mathscr{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2e-2e^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : **5 points**

Les 2 parties suivantes sont indépendantes.

Partie 1 :
Restitution organisée de connaissances

Prérequis :

- Pour X variable aléatoire à valeurs positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$, l'espérance de X, notée E(X) est définie par E(X) = $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,dt$

1°) Déterminer les réels a et b tels que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t)=(at+b)e^{-\lambda t}$ soit une primitive de g définie sur $\mathbb{R}$par $g(t)=t\lambda e^{-\lambda t}$.

2°) Montrer que $E(X)=\frac{1}{\lambda}$

Partie 2 :

Thomas possède un lecteurMP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux. L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- Les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les événements suivants :
C **:** « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;
V **:** « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;
J **:** « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;
H **:** « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;
S **:** « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

A)
Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur sonMP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.
a. Les événements *C* et *H* sont-ils indépendants ?
b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

B)
Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de sonMP3, 60 morceaux de musique.
1. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.
2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

NOM :

Annexe Exercice 3

à rendre avec la copie

Partie A :

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5
c	0				
d	1				
$d - c$					
p					

Partie B :