BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT.

SESSION DE FÉVRIER 2013

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

(Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles !)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Soit u la fonction définie sur]0 ; +∞[par $u(x)=x^2-2+\ln x$.

1. Étudier les variations de u sur]0 ; +∞[et préciser ses limites en 0 et en +∞.

2. a. Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur]0 ; +∞[. On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur]0 ; +∞[par $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$.

On note f' la fonction dérivée de f sur]0 ; +∞[.

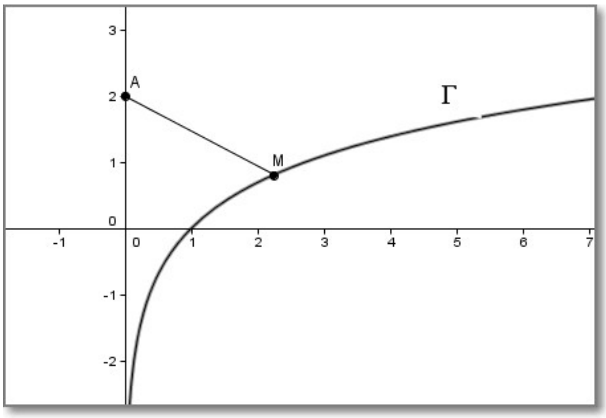
1. Montrer que, pour tout x de]0 ; +∞[, $f'(x)=\dfrac{2u(x)}{x}$.

2. En déduire les variations de f sur]0 ; +∞[.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction **ln** (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées (0 ; 2) ;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à]0 ; +∞[.



1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM=\sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur]0 ; +∞[.

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

EXERCICE 2 QCM sur les nombres complexes. 5 points

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Donner la bonne réponse **en justifiant.** Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z+\bar{z}=9+\mathrm{i}$ est :

a. 3	b. i	c. $3+i$

2. Soit $z=\mathrm{i}$. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{z}$ est :

a. $\dfrac{-2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}$	b. $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}$	c. $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

a. $\{\ (1-\mathrm{i})\ \}$	b. L'ensemble vide	c. $\{\ (1-\mathrm{i});(1+\mathrm{i})\ \}$

4. Soient A et B deux points d'affixes respectives **i** et -1.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i|=|z+1|$ | est :

a. la droite (AB)	b. le cercle de diamètre [AB]	c. la médiatrice de [AB]

5. Soit le point C d'affixe $1-\mathrm{i}$.

L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}\,y$ vérifiant $|z-1+i|=|3-4i|$ est :

a. La droite d'équation $y=-x+1$	b. Le cercle d'équation $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$	c. Le cercle de centre C de rayon 5

6. Soit z un nombre complexe ; le module de $z+\mathrm{i}$ est égal à :

a. $|z|+1$	b. $|z-1|$	c. $|\mathrm{i}\,\bar{z}+1|$

EXERCICE 3 **5 points**

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.

L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.

On considère les événements suivants :

A : « obtenir 1 en lançant le dé »

B : « obtenir une boule noire ».

1. a. Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.

c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie,la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{P}(\mathbf{X}<k)$	0,0091	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,9922	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10.

On considère l'événement : « la personne gagne au moins N parties ».

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet événement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

Expliquez votre démarche. Toute trace de recherche pertinente sera valorisée.

EXERCICE 4 — 5 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N -1
Affecter à U la valeur 3U $-2k+3$
fin pour
Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque N $=3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

   b) En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-n+1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=3^n+n-1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

b) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p=3$.

c) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.