TS Devoir commun de Mathématiques n°1 13/11/2013

*Durée : 3 heures*

---

**<u>Ex 1 :</u> ( 2 points )**

**<u>Questions de cours</u>** :

**1.** $a$ est un nombre strictement négatif et b est un réel.

Démontrer en utilisant la définition que $\lim_{x \to +\infty} (ax + b) = -\infty$ .

**2.** Soit $a$ un réel, démontrer que la tangente au point d'abscisse $a$ à la courbe de la fonction carrée admet pour équation réduite : $y = 2ax - a^2$.

**<u>Ex 2 :</u> ( 3 points )**

Préciser pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse. Justifier soigneusement.

- ***Si une suite $(u_n)$ strictement croissante alors elle diverge vers $+\infty$ .***
- ***Si le carré d'un complexe est réel alors sa partie imaginaire est nulle.***
- ***Si $z_1$ et $z_2$ sont les solutions complexes de l'équation $az^2+bz+c = 0$ où a, b et c sont trois réels non nuls alors $z_1 + z_2 = -b$.***

- ***Sachant que*** $z=-2+2i$ , $z^4$ ***est un réel.***
- ***L'équation :*** $\frac{z-4}{iz+3}=2i$ ***a une seule solution réelle.***

**<u>Ex 3:</u> ( 3 points )**

Le vaccin contre une maladie contagieuse n'est pas toujours totalement efficace.

Une étude réalisée sur un grand nombre d'individus a conclu que :

- la moitié de la population est vaccinée ;
- lorsqu'un individu est vacciné, il contracte quand même la maladie dans 1 cas sur 5 ;
- lorsqu'un individu n'est pas vacciné, il contracte la maladie dans 1 cas sur 3.

On choisit au hasard un individu de la population. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

On considère les événements :

V : « L'individu est vacciné » ;

M : « L'individu est malade ».

1°) En traduisant les données de l'énoncé, déterminer $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{M})$ , $p_{\bar{\mathrm{V}}}(\mathrm{M})$ et $p(\mathrm{V})$ .

2°) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

3°) Quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

4°) L'individu choisi n'est pas malade.

Quelle est la probabilité qu'il ait été vacciné ?

**Ex 4 : ( 2 points )**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ , l'équation : $3z^2-7z+5=0$
2. On souhaite résoudre l'équation (E) : $3z^3-z^2-9z+10=0$
   a) Montrer que -2 est une solution de (E).
   b) Ainsi quel que soit le complexe z, il existe trois réels : $a$ , $b$ et $c$ tels que :
   $$3z^3-z^2-9z+10=(z+2)(az^2+bz+c)$$
   Déterminer ces trois réels $a$ , $b$ et $c$ .
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ , l'équation (E).

**Ex 5: ( 5 points )**

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+2$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$ .

2°) Expliquer pourquoi $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

3°) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$

3°) a) A l'aide de votre calculatrice déterminer un réel X positif tel que pour tout $x>X$ : $1{,}99<f(x)<2{,}01$
Vous préciserez les résultats donnés par la calculatrice qui permettent de conjecturer.

b) Soit $I=]2-\alpha;2+\alpha[$ où $0<\alpha<1$

Montrer que pour $x>0$ , $f(x)\in I \Leftrightarrow x>\sqrt{\dfrac{1}{\alpha}-1}$

c) Traduire ce comportement en termes de limite puis interpréter graphiquement cette limite.

4°) a) Déterminer une équation de (T) tangente à $C_f$ , la courbe de $f$ , au point d'abscisse 1.

b) Montrer que pour tout $x$ réel, $f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x+3\right) = \dfrac{0{,}5x(x-1)^2}{x^2+1}$

c) Étudier le signe de $\dfrac{0{,}5x(x-1)^2}{x^2+1}$ puis en déduire la position de $C_f$ et de (T).

5°) Donner le tableau de valeurs de la fonction $f$ sur $[-5;5]$ avec un pas de 1.

6°) Tracer $C_f$ et (T) dans un repère d'unité 1 cm ainsi que les éventuelles tangentes horizontales et les éventuelles asymptotes.

**<u>Ex 6 :</u> ( 5 points )**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel par : $\begin{pmatrix} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n \end{pmatrix}$

**Partie A** :

On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.
Puis préciser ce qu'affichera le bon algorithme pour n=3.

| **Algorithme n°1** | **Algorithme n°2** | **Algorithme n°3** |
|---|---|---|
| **Variables** :<br>u est un réel<br>n et k sont des entiers naturels<br><br>**Début de l'algorithme** :<br>Lire n<br><br>Pour k variant de 1 à n faire<br>u prend la valeur $\frac{1}{2}$<br>Afficher u<br>u prend la valeur $\frac{k+1}{2k}u$<br>Fin pour<br>Afficher u<br><br>**Fin algorithme** | **Variables** :<br>u est un réel<br>n et k sont des entiers naturels<br><br>**Début de l'algorithme** :<br>Lire n<br>u prend la valeur $\frac{1}{2}$<br><br>Pour k variant de 1 à n faire<br>Afficher u<br>u prend la valeur $\frac{k+1}{2k}u$<br>Fin pour<br><br>**Fin algorithme** | **Variables** :<br>u est un réel<br>n et k sont des entiers naturels<br><br>**Début de l'algorithme** :<br>Lire n<br>u prend la valeur $\frac{1}{2}$<br><br>Pour k variant de 1 à n faire<br>u prend la valeur $\frac{k+1}{2k}u$<br>Fin pour<br><br>Afficher u<br><br>**Fin algorithme** |

**Partie B** :

1) Conjecturer le comportement global de la suite (bornes, variations, convergence).
2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n$ est strictement positif.
3) Démontrer le sens variation de la suite $(u_n)$ .
4) En déduire que la suite $(u_n)$ est bornée et préciser les bornes.

**Partie C** :

Pour tout entier n non nul, on pose $v_n=\frac{u_n}{n}$ .

1) Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme : $v_1$ .
2) En déduire que pour tout entier n non nul, on a : $u_n=\frac{n}{2^n}$ .