TS . 2012/2013. Lycée Prévert. Contrôle n°3. Durée : 3 heures. Mardi 20/11/12

Le plus grand soin doit être apporté à la rédaction et aux calculs.
Veillez à la lisibilité de votre travail. Soulignez vos résultats.

Exercice 1 : (6,5 pts)

Première partie : Démonstration à rédiger

Démontrer la propriété suivante :

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : $\begin{cases} u_n \leqslant v_n, \text{ à partir d'un certain rang,} \\ \text{et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Deuxième partie : Connaissance du cours

Recopier et compléter les phrases suivantes, **avec une courte justification** :

Soient A et B deux événements,de probabilité non nulle, d'une même expérience aléatoire.

$p(A\cup B)\neq p(A)+p(B)$ sauf si A et B sont ………………………………………

$p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$ sauf si A et B sont ………………………………………

$p(A\cap B)\neq p_A(B)$ sauf si $p(A)$ = …....

Troisième partie : Vrai-Faux à justifier

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.

1 : Soit (u_n) une suite de nombres réels de terme général u_n

1.a) Si la suite (u_n) est positive et strictement croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	1.b) Si la suite (u_n) est monotone et bornée alors elle est convergente.

2 : Soient (v_n) et (w_n) deux suites de nombres réels de termes généraux v_n et w_n

2.a) Si la suite $(v_n w_n)$ diverge alors les suites (v_n) et (w_n) divergent.	2.b) Si pour tout n, $v_n \leqslant w_n$ et si la suite (w_n) est décroissante alors la suite (v_n) est majorée

Exercice 2 : (6,5 pts). Probabilités. Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.
On prélève au hasard une boule de l'urne.
Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.
Si la première boule tirée est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la première boule tirée.

a. Faire un arbre pondéré illustrant l'énoncé.
b. Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient rouges.
c. Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.
d. Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.
On prélève successivement et au hasard **quatre** boules de l'urne **en remettant dans l'urne** la boule tirée après chaque tirage.
Soit la variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages.

a. Quelle est la nature de la loi de probabilité suivie par X ? Donner ses paramètres.
b. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1-\left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.
c. Écrire en langage naturel un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à $0{,}9999$ puis utiliser la calculatrice pour déterminer cet entier.

Exercice 3: (7 pts).

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right), \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞ [par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{x}\right)$.

a) Montrer en détaillant les calculs que $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})}{x^2}\right)$

b) Étudier les variations de la fonction f et en déduire que la fonction f admet un minimum que l'on précisera.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant\sqrt{7}$.

2. a. Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$.

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. On déduit de la relation « $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right)$ » que la limite L de cette suite est telle que

$L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{7}{L}\right)$. Déterminer L.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{7})^2}{u_{n.}}$

4. On définit la suite (d_n) par $\begin{cases} d_0=1 \\ d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n^2, \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$.

b. Voici un algorithme :

Variables : n et p sont des entiers naturels , d est un réel.
Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations : Affecter à d la valeur 1.
Affecter à n la valeur 0
Traitement : Tant que $d>10^{-p}$.
Affecter à d la valeur $0{,}5\,d^2$
Affecter à n la valeur n + 1.
Sortie : Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5. Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.