Lycée Jacques Prévert

Année scolaire 2011-2012

Devoir commun Tle S (1° trimestre)

Durée : 2h

Vendredi 4 Novembre 2011

Ex 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{3-x}$

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 3 ainsi que les éventuelles asymptotes.

2) Déterminer les intersections de la courbe représentative de f et des axes du repère.

3) Déterminer le signe de f.

4) Déterminer trois réels a,b et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{3-x}$, pour tout $x \neq 3$.

5) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = -x-6$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$

6) Étudier les positions relatives de la courbe de f et de (d).

Ex 2 : (5 points)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$.

1°) On a représenté en annexe, dans un repère orthonormé, les droites (d_1) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ et (d_2) d'équation $y = x$.

Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (u_n).

(Laissez les traits de construction apparents).

2°) Conjecturez la limite de la suite (u_n).

3°) Nous allons démontrer de deux façons que pour tout n entier naturel, $u_n = \dfrac{13}{18}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{23}{18}$

a) Méthode 1 :

On considère la suite (v_n) définie pour tout n entier naturel par $v_n = u_n - \dfrac{23}{18}$

- Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n
- En déduire la nature de la suite (v_n)
- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

b) Méthode 2 :

Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel $u_n = \dfrac{13}{18}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{23}{18}$

4°) Déterminez la limite de la suite (u_n).

Ex 3 : (5 points)

Le plan est rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ représenté en feuille annexe.

À tout point M d' affixe z du plan, on associe le point M' d' affixe $z' = \dfrac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$

où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

On dit que M' est l'image de M

1°) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.

Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C.

Placer les points A , B, C, A', B' et C'.

2°) On pose $z = x+iy$ (avec x et y réels) .

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .

3°) Montrer que l'ensemble des points M invariants (c'est à dire tels que $M' = M$)

est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

4°) Tracer (D). Quelle conjecture peut-on faire ?

Démontrez votre conjecture à l'aide du 2°).

Ex 4 : (4 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifiez soigneusement.

1°) Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

2°) Si i est le complexe tel que $i^2 = -1$ alors : $i^{4n} = 1$ pour tout entier naturel n.

3°) Si i est le complexe tel que $i^2 = -1$ alors $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{199} = 1$

4°) L'équation $x^4 - 16 = 0$ possède deux solutions réelles et deux solutions imaginaires purs.

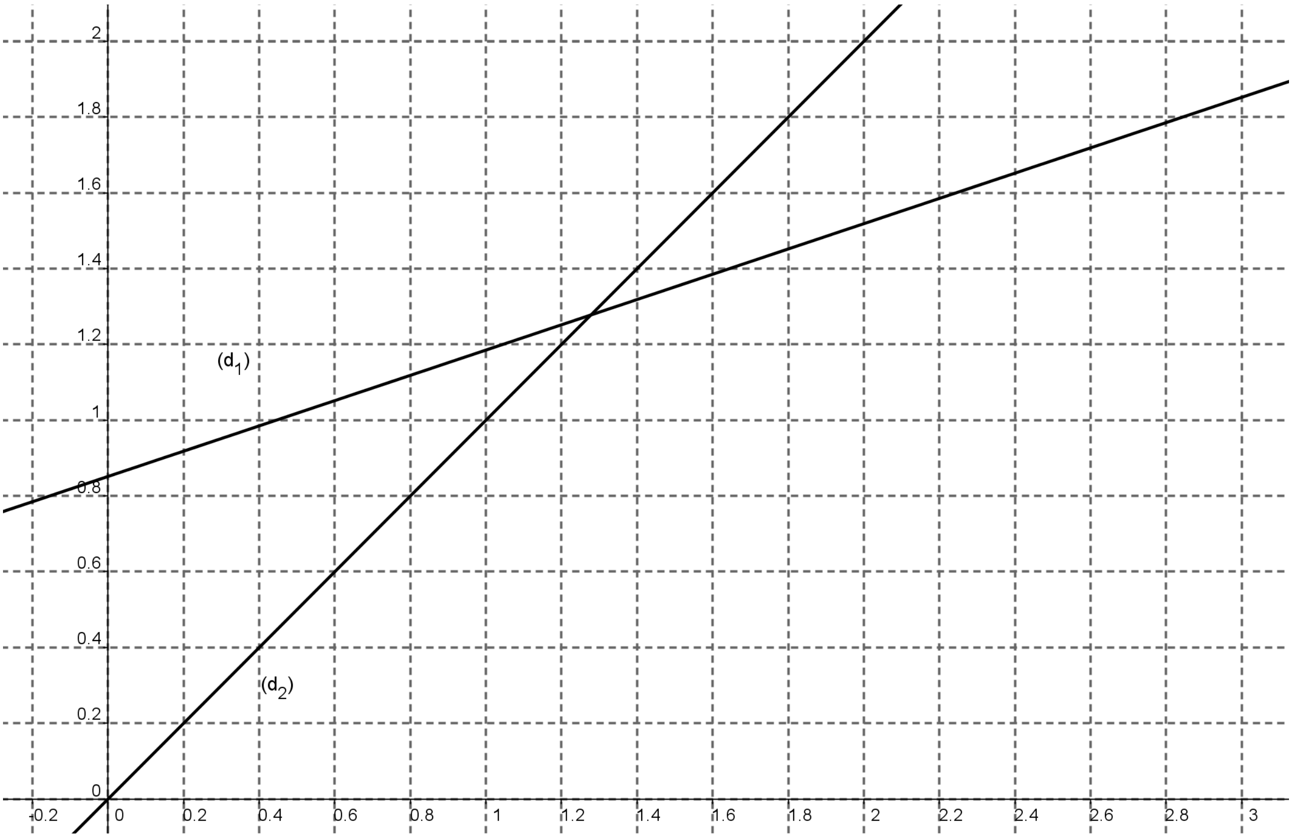
NOM : Classe :

Prénom :

FEUILLE ANNEXE

à rendre avec la copie

Ex 2 :



Ex 3 :