1ere S	Devoir commun de mathématiques (2heures)	13/12/2016

Le soin apporté à la rédaction de la copie sera pris en compte dans la notation.

<u>Question de cours :</u> (3 points)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et S la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

1) Simplifier au maximum la quantité : $S - qS$.
2) En déduire que la formule permettant de calculer la somme S est : $u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
3) Application : en utilisant la formule précédente, calculer $\sum_{k=0}^{10} 3^k$ c'est-à-dire $1+3+3^2+\ldots+3^{10}$.

<u>Vrai ou faux</u> ? (3 points)

1) Dans un repère, la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\binom{3}{9}$ est parallèle à la droite (d') d'équation cartésienne : $6x - 2y - 11 = 0$.
2) ABCD est un parallélogramme de centre I, quel que soit le point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI}$.

<u>Exercice 1 :</u> (6 points)

A l'ouverture d'un supermarché, le service client a organisé une enquête sur la fréquentation du magasin. Cette fréquentation peut-être modélisée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$\begin{cases} \mathrm{u_1} = 5\,000 \\ \mathrm{u_{n+1}} = 0{,}7\mathrm{u_n} + 3\,000 \quad \text{pour } \mathrm{n} \geq 1 \end{cases}$$

$\mathrm{u_n}$ étant le nombre de clients pendant le $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ mois suivant l'ouverture.

1) Que signifie $\mathrm{u_1}$ et $\mathrm{u_{24}}$ pour le magasin ?
2) Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
3) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

On ne peut donc pas directement donner une formule explicite de u_n (terme général de la suite).
Pour ce faire, nous allons étudier une autre suite, une suite auxiliaire notée : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et définie par : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = u_n - 10\,000$.

4) Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
5) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_{n+1} - 0{,}7\,v_n = 0$. En déduire que la suite (v_n) est géométrique. Préciser le premier terme et la raison.
6) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 10\,000 - 5\,000 \times 0{,}7^{n-1}$
7) Selon ce modèle, quelle serait alors la fréquentation de ce magasin deux ans après son ouverture.

Exercice 2 : (5 points)

Dans le repère orthonormé (O ; I, J), on considère le point **A (-2 ; 3)** et la droite (D) d'équation : $\boldsymbol{y = 2x + 1}$.
« L'objectif de l'étude est de déterminer le point de la droite qui est le plus proche de A »

Partie A : Avec la géométrie :
Voici une propriété qui peut vous être utile :

« deux droites perpendiculaires ont des coefficients directeurs dont le produit est -1. »

1) Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) perpendiculaire à (D) contenant le point A.
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et de (D).
3) Conclure.

Partie B : Avec l'analyse

1) On note B le point de la droite dont l'abscisse est x. Montrer que AB^2 est donné par la fonction f définie par : $f(x) = 5x^2 - 4x + 8$
2) Etudier le sens de variation de la fonction f et construire son tableau de variation.
3) En déduire que f possède un minimum.
4) On considère maintenant la distance AB donnée par la fonction ***g*** définie par : $g(x) = \sqrt{f(x)}$
   1) Donner l'ensemble de définition de g.
   2) Expliquer pourquoi f et g ont le même sens de variation.
   3) En déduire les coordonnées du point B de la droite (D) qui est le plus proche de A.

Partie C : Avec un algorithme **(en bonus)**

A quoi sert cet algorithme ?

Et comment peut-on s'en servir pour rechercher le point B de la droite (D) qui est le plus proche du point A ?

Entrée Saisir x **Traitement** y prend la valeur $2x + 1$ z prend la valeur $\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$ **Sortie** Afficher z

Exercice 3 : (3 points)

Notons x le rayon d'un des deux disques intérieur.
Pour quelles valeurs de x, l'aire du disque dont c'est le rayon est-elle supérieure ou égale au double de l'aire du deuxième disque intérieur ?