Corrigé de l'exercice de spécialité du bac blanc de mathématiques du 28 janvier 2015

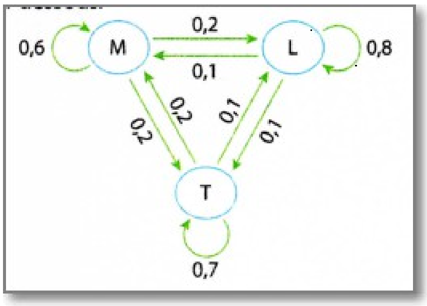
EXERCICE 4 . Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. 5 points

Partie A : Matrices

Une agence de location

On considère une agence de locations de voitures qui a trois succursales, une à Marseille (M), une à Toulouse (T) et une à Lyon (L).

La redistribution des voitures d'un début de mois au début du suivant est indiquée par le graphe ci-dessous.



1. Interpréter les flèches partant de M et les probabilités indiquées le long de ces flèches.

La probabilité pour une voiture étant à Marseille en début de mois :
- **d'être à Marseille au début du mois suivant est 0,6,**
- **d'être à Lyon au début du mois suivant est 0,2,**
- **d'être à Toulouse au début du mois suivant est 0,2.**

2. Écrire la matrice de transition A dont le coefficient $a_{i,j}$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j

(L correspondant à l'état 1, M à l'état 2, T à l'état 3).

$$A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,6 & 0,2\\ 0,1 & 0,2 & 0,7\end{pmatrix}$$

3. À un début de mois donné, noté mois 0, il y a 600, 500, 400 véhicules respectivement à L, M, T.

On représente cette répartition par une matrice ligne $R=\begin{pmatrix}600 & 500 & 400\end{pmatrix}$.

a. Calculer RA. Que représente cette matrice ? Expliquer.

RA = $\begin{pmatrix}600 & 500 & 400\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,8 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,6 & 0,2\\ 0,1 & 0,2 & 0,7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}620 & 440 & 440\end{pmatrix}$

Explication pour 620 :
$620=600\times0,8+500\times0,2+400\times0,1$ **représente le nombre de véhicules que l'on peut prévoir, au début du mois 1, à Lyon.**
La matrice RA donne donc la répartition des véhicules, dans l'ordre L, M, T, que l'on peut prévoir au début du mois 1.

b. Calculer RA^2. Quelle répartition peut-on prévoir au bout de deux mois ? de trois mois ?

b. à l'aide de la calculatrice : $RA^2=\begin{pmatrix}628 & 414 & 458\end{pmatrix}$
Au bout de deux mois on prévoit 628 véhicules à Lyon, 414 à Marseille et 458 à Toulouse.
De même : $RA^3=\begin{pmatrix}631 & 402,8 & 466,2\end{pmatrix}$
On peut prévoir au bout de 3 mois, 631 véhicules à Lyon, 403 à Marseille et 466 à Toulouse.

Partie B : Arithmétique

On se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels **non nuls** vérifiant la relation (F) : $7^n - 3\times 2^m = 1$.

1. On suppose $m \leqslant 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

— Si $m=1$, (F) s'écrit $7^n - 6 = 1 \iff 7^n = 7$, d'où $n=1$. Le couple $(1;1)$ est solution.
— Si $m=2$, (F) s'écrit $7^n - 12 = 1 \iff 7^n = 13$ or 7 ne divise pas 13 : pas de solution ;
— Si $m=3$, (F) s'écrit $7^n - 24 = 1 \iff 7^n = 25$ or 7 ne divise pas 25 : pas de solution ;
— Si $m=4$, (F) s'écrit $7^n - 48 = 1 \iff 7^n = 49$ d'où $n=2$. Le couple $(2;4)$ est solution.

Il y a bien exactement deux couples solutions lorsque $m \leqslant 4$

2. On suppose maintenant $m \geqslant 5$.

a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 32)

Comme $m \geqslant 5$, il existe p entier positif tel que $m = 5 + p$.
Si $(n;m)$ vérifie (F) alors $7^n - 3\times 2^m = 1 \iff 7^n = 1 + 3\times 2^{5+p} = 1 + 3\times 2^5 \times 2^p = 1 + 3\times 32\times 2^p = 1 + 32k$ avec $k = 3\times 2^p$ entier, donc, par définition, $7^n \equiv 1[32]$.

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

On a $7 \equiv 7[32]$; $7^2 \equiv 17[32]$ car $49 = 17 + 32$; $7^3 \equiv 23[32]$;car $7^3 = 343 = 23 + 10\times 32$;
$7^4 = 7^3 \times 7 \equiv 7\times 23[32]$ or $7\times 23 = 161 = 1 + 5\times 32$ donc $7^4 \equiv 1[32]$
À partir de là on retrouve de manière cyclique 7, 17, 23, 1 comme restes dans la division par 32 :
k étant un entier naturel :
$7^{4k} \equiv 1[32]$; $7^{4k+1} \equiv 7[32]$; $7^{4k+2} \equiv 17[32]$; $7^{4k+3} \equiv 23[32]$
Les puissances de 7 dont le reste dans la division par 32 est égal à 1 sont donc celles dont l'exposant n est un multiple de 4.

Si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 32) et donc n est un multiple de 4

c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 5).

D'après les deux questions précédentes si un couple $(n;m)$ est solution de (F), alors $7^n \equiv 1[32]$ et n est un multiple de 4.
Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$, d'où en reportant $7^{4k} \equiv 1[32] \iff (7^4)^k \equiv 1[32] \iff 2401^k \equiv 1[32]$.
Or $2401 = 5\times 480 + 1$, donc $2401 \equiv 1[5]$ donc $(2401)^k \equiv 1^k[5]$ donc $7^n \equiv 1[5]$.

d. La relation $7^n - 3\times 2^m = 1$ et le résultat $7^n \equiv 1$ (mod 5) sont-ils compatibles ?

Soit $(n;m)$ un couple solution de (F), donc $7^n - 3\times 2^m = 1$ et $7^n \equiv 1[5]$ donc il existe un entier k tel que $7^n = 1 + 5k$ donc $1 + 5k - 3\times 2^m = 1$ donc $5k = 3\times 2^m$.
Ceci n'est pas possible puisque 5 ne divise ni 2, ni 3.
Conclusion : il n'existe pas de couple solution lorsque $m \geqslant 5$

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

D'après les questions 1. et 2. les seuls couples solutions de (F) sont $(1;1)$ et $(2;4)$.