TS3 - mai 2013 - DS9 : Corrigé de l' exercice 4 : fonctions et calcul d'aires 6 points

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble ℝ des nombres réels par $f(x)=x\,\mathrm{e}^{1-x}$ et $g(x)=x^2\mathrm{e}^{1-x}$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont respectivement notées C_f et $\mathrm{C'}_g$. Leur tracé est donné en annexe.

1. Étude des fonctions f et g

a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{1-x}=+\infty\end{cases}$ **donc par produit** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{1-x}=+\infty\end{cases}$ **donc par produit** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. On admettra que la fonction g a pour limite 0 en$+\infty$.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{1-x}=0\end{cases}$ **. Or $+\infty\times 0$ est une forme indéterminée donc il faut utiliser une propriété du cours pour poursuivre : Nous savons que** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ **donc** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

Modifions l'écriture de $f(x)$: $f(x)=x\times\mathrm{e}^1\times\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}\times\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ **donc d'après ce qui précède** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

c. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

Les fonctions f et g sont dérivables sur ℝ comme produit de fonctions dérivables sur ℝ.
On utilise la formule de dérivation d'un produit $(uv)'=u'v+uv'$
Pour la fonction f :
$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{1-x}+x\times(-1)\times\mathrm{e}^{1-x}=\mathrm{e}^{1-x}(1-x)$.
Étudions le signe de $f'(x)$:

Comme $\mathrm{e}^{1-x}>0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	**Justifications**
Signe de $f'(x)$	+ 0 −	$1-x\geqslant 0$ **équivaut à** $1\geqslant x$
Variations de f	$-\infty$ ↗ 1 ↘ 0	$f(1)=\mathrm{e}^0=1$

Pour la fonction g :
$g'(x)=2x\times\mathrm{e}^{1-x}+x^2\times(-1)\times\mathrm{e}^{1-x}=\mathrm{e}^{1-x}(2x-x^2)=\mathrm{e}^{1-x}(x(2-x))$.

Étudions le signe de $g'(x)$:
Comme $\mathrm{e}^{1-x}>0$ quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme $x(2-x)$.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$	Justifications
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		Le trinôme $-x^2+2x$ est négatif à l'extérieur des racines 0 et 2 , et positif entre les racines . (on peut aussi faire l'étude du signe du produit $x(2-x)$)
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	

2. Calcul d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par : $I_0=\int_0^1 e^{1-x}dx$ et, pour $n\geqslant 1$, $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

a. Calculer la valeur exacte de I_0.

$I_0=\int_0^1 e^{1-x}dx$ = $\left[-e^{1-x}\right]_0^1$ = $-e^0+e^1$ = $e-1$.

b. Déterminer pour $n\geqslant 0$, la dérivée de la fonction h définie sur ℝ par $h(x)=x^{n+1}e^{1-x}$.

En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 0$: $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$.

h est dérivable sur ℝ et pour tout x réel : $h'(x)=(n+1)x^n e^{1-x}+x^{n+1}(-1)e^{1-x}$.
On en déduit $x^{n+1}e^{1-x}=(n+1)x^n e^{1-x}-h'(x)$. Donc
$\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx=\int_0^1((n+1)x^n e^{1-x}-h'(x))dx=\int_0^1(n+1)x^n e^{1-x}dx-\int_0^1 h'(x)dx=(n+1)I_n-(h(1)-h(0))$ =
$(n+1)I_n-1$
Autrement dit, pour tout entier $n\geqslant 0$ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

c. En déduire la valeur exacte de I_1 , puis celle de I_2 .

La formule précédente donne pour n = 0, $I_1=-1+I_0=-1+e-1=e-2\approx 0{,}72$.
Pour n = 1, $I_2=-1+2I_1=-1+2(e-2)=2e-5\approx 0{,}44$

3. Calcul d'une aire plane

a. Étudier la position relative des courbes C_f et C'_g.

Pour étudier la position des deux courbes, on étudie le signe de la différence $f(x)-g(x)$
Soit d la fonction définie sur ℝ par $d(x)=f(x)-g(x)$ = $xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=xe^{1-x}(1-x)$.
Comme $e^{1-x}>0$ quel que soit le réel x, le signe de $d(x)$ est celui du trinôme $x(1-x)$, soit négatif sauf entre les racines du trinôme 0 et 1.
On résume ceci dans un tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de la différence $d(x)=f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Position relative des deux courbes		C_f est sous C'_g	O	C_f est au dessus de C'_g	intersection	C_f est sous C'_g	

b. On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes C et C' , d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

En exprimant A comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : $\mathbf{A=3-e}$.

b. On vient de voir que sur l'intervalle [0 ; 1] $f(x)>g(x)$, donc l'aire de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathbf{C}_f$ et $\mathbf{C'}_g$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ est égale à la différence des intégrales :

$$\mathbf{A}=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx = \mathbf{I_1-I_2=e-2-(2e-5)=3-e}.$$

4. Étude de l'égalité de deux aires

Soit a un réel strictement supérieur à 1.

On désigne par $\mathbf{S}(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathbf{C}_f$ et $\mathbf{C'}_g$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=a$.

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires A et $\mathbf{S}(a)$ sont égales.

a. Montrer que $\mathbf{S}(a)=3-\mathbf{e}^{1-a}(a^2+a+1)$ à l'aide des résultats donnés ci-dessous par un logiciel de calcul formel :

```
1 integrer(x*exp(1-x),x,1,a)
                                  -a*exp(-a+1)-exp(-a+1)+2
2 integrer(x^2*exp(1-x),x,1,a)
                         -a^2*exp(-a+1)-2*a*exp(-a+1)-2*exp(-a+1)+5
```

Entre 1 et a , $\mathbf{C}_f$ est sous $\mathbf{C'}_g$ donc, en utilisant les résultats fournis par le logiciel de calcul formel (Xcas) :

S(a) = $\displaystyle\int_1^a g(x)\,dx-\int_1^a f(x)\,dx$ = $-a^2\times e^{-a+1}-2a\,e^{-a+1}-2e^{-a+1}+5-(-a\,e^{-a+1}-e^{-a+1}+2)=3-e^{1-a}(a^2+a+1)$

b. Démontrer que l'équation $\mathbf{S}(a)=\mathbf{A}$ est équivalente à l'équation : $\mathbf{e}^a=a^2+a+1$.

On a $\mathrm{S}(a)=\mathrm{A}$ équivaut successivement à :

$3-\mathrm{e}^{1-a}(a^2+a+1)=3-\mathrm{e}$

$-\mathrm{e}^{1-a}(a^2+a+1)=-\mathrm{e}$ **(on soustrait 3 de chaque côté)**

$\mathrm{e}^{1-a}(a^2+a+1)=\mathrm{e}$ **(on multiplie par –1)**

$\mathrm{e}^{-a}(a^2+a+1)=1$ **.(on divise par e)**

$a^2+a+1=\mathrm{e}^a$ **(on multiplie par e^a)**

c. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a , solution du problème posé.

Nous ne savons pas résoudre exactement l'équation $a^2+a+1=\mathrm{e}^a$ mais le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions monotones, permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution.

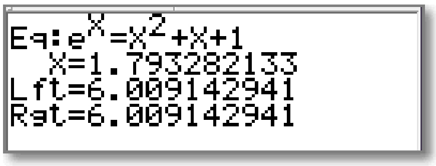
L'équation $\mathrm{e}^x=x^2+x+1$ est équivalente à $\mathrm{e}^x-x^2-x-1=0$.
Posons $h(x)=\mathrm{e}^x-x^2-x-1$, et étudions la fonction h sur [1 ; +∞ [(puisque on cherche $a>1$)
Cette fonction est dérivable sur ℝ et $h'(x)=\mathrm{e}^x-2x-1$, comme nous ne savons pas étudier directement le signe de cette dérivée, nous la dérivons , elle-même est dérivable sur ℝ et $h''(x)=\mathrm{e}^x-2$.
Nous savons étudier le signe de $h''(x)$.
$h''(x)\geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x-2\geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x\geqslant 2 \iff x\geqslant \ln 2$.

On peut ainsi dresser le tableau suivant :

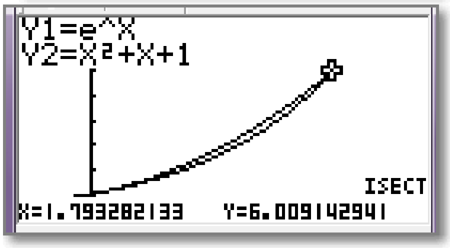
x	1		α		a		$+\infty$	Justifications
Signe de $h''(x)$		$+$						$h''(x)\geqslant 0 \iff x\geqslant \ln 2$. **Or** $\ln 2\approx 0{,}69<1$
Variations de $h'(x)$	$e-3<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$	
Signe de $h'(x)$		$-$	0			$+$		
Variations de h	$e-3<0$	$\searrow$	$h(\alpha)<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	

h' est continue (car dérivable) et strictement croissante sur]1 ; +∞ [.
On a $h'(1)=e^1-2-1=e-3<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x)=+\infty$ (limite obtenue en factorisant par e^x) donc 0 appartient à $]e-3;+\infty[$
Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions monotones, il existe un réel unique α, 1 < α tel que $h'(\alpha)=0$.
On en déduit que h' est strictement négative sur $]1;\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha;+\infty[$.
h est donc strictement décroissante sur $]1;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.
D'autre part, h(1) = e − 3 ≈ − 0,28 ainsi h est strictement négative sur $[1;\alpha[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.
On utilise une deuxième fois le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions monotones :
h étant continue et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$, il existe $a\in\,]\alpha;+\infty[$, unique, tel que $h(a)=0$.

Nous pouvons avoir une valeur approchée de a à l'aide du menu « Équation » de la calculatrice , en utilisant le Solveur , nous obtenons :



Nous pouvons aussi utiliser le menu « Graph » , G-solv , Isect pour obtenir les coordonnées des points d'intersection des deux courbes représentatives des fonctions entrées en Y1 et Y2 comme ci-contre :
Attention, il y a deux points d'intersection, mais (0 ; 1) ne convient pas puisque $a\geqslant 1$



Exercice 4. Figure 2. :

Hachurer la zone ayant pour aire A et la zone ayant pour aire S(a)