Lycée Prévert. Bac blanc de mathématiques. Janvier 2014. Corrigé de l'exercice de spécialité.

Partie A : Matrices

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit la matrice M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel donné.

a) Calculer M^2 et M^3 puis faire une conjecture sur l'expression de M^n, pour n entier naturel , $n \geqslant 1$

On pose la multiplication et on obtient :

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **;** $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

On peut donc conjecturer que, pour *n* entier naturel , $n \geqslant 1$ $M^n = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Prouver cette conjecture.

On raisonne par récurrence sur n. La proposition à établir est :

« pour tout *n* entier naturel supérieur ou égal à 1, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **»**

►Initialisation :
La proposition est vraie pour $n=1$ (définition de M), pour $n=2$ et pour $n=3$, cela a été vérifié en a)
►Hérédité :
Montrons que si la proposition est vraie à un rang donné n alors elle est vraie au rang suivant.

Supposons que, pour un *n* entier naturel supérieur ou égal à 1 donné on ait $M^n = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

montrons qu'alors $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & na & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)a+a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & na & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La proposition est bien héréditaire.
►Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, l'initialisation et l'hérédité étant vérifiées, la proposition est établie.

2. **Vrai ou Faux : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier précisément.**

a. Si on peut calculer la matrice A + B alors on peut calculer la matrice AB

Faux :
On peut additionner deux matrices si et seulement si elles ont même taille. Supposons par exemple que A et B ait toutes deux pour taille $(m \times n)$: m lignes et n colonnes avec $m \neq n$. Dans ce cas la matrice AB n'est pas calculable car le nombre de colonnes de A , n , est différent du nombre de lignes de B , qui est m .

b. Soient deux matrices carrées A et B, de même taille, inversibles, alors AB est aussi inversible et

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Vrai :
Soient A et B deux matrices carrées inversibles, on a donc $AA^{-1}=A^{-1}A=I_3$ **et** $BB^{-1}=B^{-1}B=I_3$
Montrons que $(B^{-1}A^{-1})(AB)=(AB)(B^{-1}A^{-1})=I_3$

$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}(I_3)B=B^{-1}B=I_3$ *On a utilisé la propriété d'associativité de la multiplication des matrices*	$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=A(I_3)A^{-1}=AA^{-1}=I_3$

Ces deux égalités prouvent que la matrice AB **est inversible et que sa matrice inverse (unique) est** $B^{-1}A^{-1}$
Partie B : Arithmétique : extrait du Bac Asie 2004.

Le but de cette partie est de répondre à la question :

« Est-il possible de trouver a et n tels que $a^2+9=3^n$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et a un entier naturel non nul ? »

a. Montrez que si $n\geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou 3 modulo 4.

Raisonnons modulo 4.
$3\equiv -1[4]$ **donc par compatibilité des congruences avec les puissances, pour tout** n **entier naturel** $3^n\equiv(-1)^n[4]$**, donc si** n **est pair** $3^n\equiv 1[4]$ **et si** n **est impair** $3^n\equiv -1[4]$ **c'est à dire** $3^n\equiv 3[4]$

b. Montrez que si a est une solution, a est pair et déduisez-en que nécessairement n est pair.

Raisonnons modulo 2.
Montrons que si a **est une solution alors** $a\equiv 0[2]$ **c'est à dire** a **pair.**
Si a **est une solution alors il existe un entier** n **tel que** $a^2=3^n-9$
or $3\equiv 1[2]$ **donc, quelque soit** n **entier naturel,** $3^n\equiv 1[2]$ **et** $9\equiv 1[2]$ **donc par compatibilité des congruences avec la soustraction :** $a^2=3^n-9\equiv 0[2]$**,** a^2 **est donc pair.**
Le tableau de congruences suivant nous montre que si a^2 **est pair alors** a **est pair ;**

a est congru à …modulo 2	0	1
a^2 est congru à …modulo 2	0	1

Donc si a **est une solution,** a **est pair.**

Montrons que n **est nécessairement pair :**
Raisonnons à nouveau modulo 4.
a **est pair donc il existe** m **entier tel que** $a=2m$ **donc** $a^2+9=4m^2+9\equiv 0+1[4]\equiv 1[4]$
donc $3^n\equiv 1[4]$**. Nous avons vu dans la question précédente que ceci équivalait à** n **pair.**

c. On pose $n=2p$ où p est un entier naturel, $p\geqslant 2$.

Déduisez d'une factorisation de $3^{2p}-a^2$ que la réponse à la question posée est « non ».

$3^{2p}-a^2=(3^p)^2-a^2=(3^p-a)(3^p+a)$.
Si a **est une solution alors** $9=(3^p-a)(3^p+a)$**,** 3^p+a **est un diviseur positif de 9 donc 1 ; 3 ou 9 , c'est impossible car** p **est supérieur ou égal à 2 donc** 3^p+a **est strictement supérieur à 9.**