CORRIGÉ DU BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT. SESSION DE FÉVRIER 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Soit $\boldsymbol{u}$ la fonction définie sur]0 ; +∞[par $\boldsymbol{u(x)=x^2-2+\ln x}$.

1. Étudier les variations de $\boldsymbol{u}$ sur]0 ; +∞[et préciser ses limites en 0 et en +∞.

♦ Calcul de la dérivée :
La fonction u est dérivable sur]0 ; +∞ [comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel x strictement positif, $u'(x)=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}$

♦ Signe de la dérivée :
Pour tout réel x strictement positif, $u'(x)>0$ **comme quotient de deux nombres strictement positifs, la fonction u est donc strictement croissante sur]0 ; +∞[.**

♦ Limite en +∞ :
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ **donc, par somme,** $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ **.**

♦ Limite en zéro :
$\lim\limits_{x\to0}x^2-2=-2$ **et** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x)=-\infty$ **donc, par somme,** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}u(x)=-\infty$ **.**

♦ Tableau de variations (il n'était pas explicitement demandé mais il permet de synthétiser et de bien illustrer la question suivante)

x	0	$+\infty$
Signe de u'(x)	+	
Variations de u	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. a. Montrer que l'équation $\boldsymbol{u(x)=0}$ admet une solution unique sur]0 ; +∞[. On note α cette solution.

- **La fonction u est continue sur]0 ; +∞ [, car dérivable sur cet intervalle.**
- **La fonction u est strictement croissante sur]0 ; +∞ [**
- **0 appartient à l'intervalle « image »]–∞ ; +∞ [**

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions monotones, l'équation $u(x)=0$ **admet une solution unique sur]0 ; +∞ [. On note α cette solution.**

x	0	1	α	2	$+\infty$
Signe de u'(x)			+		
Variations de u	$-\infty$	u(1)<0	0 ↗	u(2)>0	$+\infty$

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude $\mathbf{10^{-2}}$ de α.

On procède par observation et essais pour déterminer deux entiers consécutifs encadrant α .
1 et 2 semblent convenir.
On le confirme par le calcul : $u(1)=1-2+0=-1<0$ **et** $u(2)=4-2+\ln 2=2+\ln 2>0$**.**
Ensuite, on peut procéder par balayage ou dichotomie pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2}
On obtient : $1{,}31<\alpha<1{,}32$
(Dans la table de la calculatrice $u(1{,}31)\approx-0{,}013<0$ **et** $u(1{,}32)\approx0{,}02>0$ **)**

3. Déterminer le signe de $\boldsymbol{u(x)}$ suivant les valeurs de x.

Puisque u est croissante sur]0 ; +∞ [, pour tout $x\in\,]0;\alpha[$, $u(x)<u(\alpha)$ donc $u(x)<0$, pour tout $x>\alpha$, $u(x)>u(\alpha)$ donc $u(x)>0$ et $u(\alpha)=0$.

x	0		α		+ ∞
Signe de u(x)		–	0	+	

4. Montrer l'égalité : $\boldsymbol{\ln\alpha=2-\alpha^2}$.

$u(\alpha)=0$ **équivaut à** $\alpha^2-2+\ln(\alpha)=0$ **autrement dit,** $\ln(\alpha)=2-\alpha^2$ **.**

Partie B

On considère la fonction $\boldsymbol{f}$ définie et dérivable sur]0 ; +∞[par $\boldsymbol{f(x)=x^2+(2-\ln x)^2}$.

On note $\boldsymbol{f'}$ la fonction dérivée de $\boldsymbol{f}$ sur]0 ; +∞[.

1. Montrer que, pour tout x de]0 ; +∞[, $\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{2u(x)}{x}}$.

Pour tout x de]0 ; +∞ [, f est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

On utilise la formule de dérivation suivante : $(v^2)'=2vv'$ avec ici $v(x)=2-\ln x$ donc $v'(x)=\dfrac{-1}{x}$.

$f'(x)=2x+2\times(2-\ln x)\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)=2x-\dfrac{4}{x}+2\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{2x^2-4+2\ln(x)}{x}=\dfrac{2(x^2-2+\ln x)}{x}=\dfrac{2u(x)}{x}$

2. En déduire les variations de $\boldsymbol{f}$ sur]0 ; +∞[.

2 et x étant toujours strictement positifs sur]0 ; +∞ [, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, donc est strictement négatif sur]0 ; α[, et strictement positif sur]α ; +∞ [et s'annule en α.
La fonction f est strictement décroissante sur]0 ; α] et strictement croissante sur [α ; +∞ [et atteint un minimum en α.

x	0		α		+ ∞	Justifications et calculs
Signe de $f'(x)$		–	0	+		Du signe de $u(x)$, vu en question 3
Variations de f	+ ∞	↘	$f(\alpha)$	↗	+ ∞	$\boldsymbol{f(\alpha)=\alpha^2+(2-\ln\alpha)^2}$ Or $\boldsymbol{\ln\alpha=2-\alpha^2}$ donc $f(\alpha)=\alpha^2+\alpha^4$

Les limites ci-dessous n'étaient pas explicitement demandées
Limite en +∞ :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln(x))^2=+\infty$ **donc, par somme,** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ **.**

Limite en zéro :

$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ **et** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(2-\ln(x))^2=+\infty$ **donc, par somme,** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$ **.**

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$, on note :

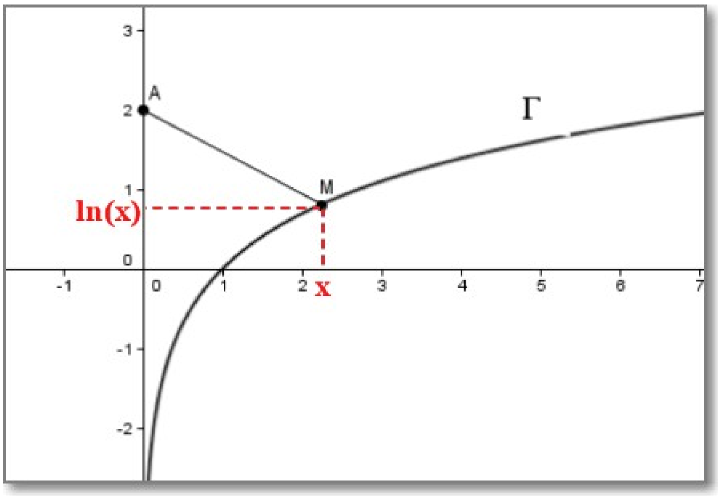
• Γ la courbe représentative de la fonction **ln** (logarithme népérien) ;

• A le point de coordonnées (0 ; 2) ;

• M le point de Γ d'abscisse x appartenant à]0 ; +∞[.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $\mathbf{AM}=\sqrt{f(x)}$.

Le point A a pour coordonnées (0 ; 2) et le point $M(x;\ln x)$, donc $AM=\sqrt{(x-0)^2+(\ln(x)-2)^2}=\sqrt{f(x)}$ (vu en Seconde, revu en Première avec le produit scalaire, obtenu avec le théorème de Pythagore...)



2. Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur]0 ; +∞[.

g est une fonction composée dérivable sur]0 ; +∞[car $f(x)>0$ (voir son minimum dans le tableau de variation) .

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Donc $g'(x)$ et $f'(x)$ ont le même signe, donc f et g ont les mêmes variations .

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

La fonction g atteint donc son minimum comme la fonction f, en α.
La distance AM est donc minimale pour $x=\alpha$ soit au point $P(\alpha;\ln\alpha)$.

c. Montrer que $\mathbf{AP}=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

$$AP=g(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha^2+\alpha^4}=\sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$$

EXERCICE 2 QCM sur les nombres complexes. 5 points

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte.

Donner la bonne réponse **en justifiant.** Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z+\bar{z}=9+i$ est :

a. $\mathbf{3}$	b. $\mathbf{i}$	c. $\mathbf{3+i}$

Plusieurs démarches sont possibles. Le plus rapide ici est de vérifier que 3 et i ne sont pas solutions et par contre 2(3 + i) + 3 – i = 9 + i

2. Soit $z=\mathbf{i}$. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a. $\dfrac{-2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}$	b. $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}$	c. $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

Ici aussi plusieurs démarches sont possibles :
Méthode 1 :

On utilise la propriété $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

donc $\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right) = \arg(-1+i\sqrt{3})-\arg(-i) = \arg(-1+i\sqrt{3})-(-\frac{\pi}{2})$

Calcul intermédiaire :

$-1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ **donc** $\arg(-1+i\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$ **(modulo** 2π **)**

Finalement $\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right) = \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}$

Méthode 2 :

On calcule $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{-i}=\frac{-i+i^2\sqrt{3}}{-i^2}=-\sqrt{3}-i$

puis méthode classique pour déterminer module et argument :

$|-\sqrt{3}-i|=\sqrt{3+1}=2$ **, puis si l'on pose** $\theta=\arg z$ **,** $\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ **et** $\sin\theta=\frac{-1}{2}$ **, d'où** $\theta=\frac{7\pi}{6}$

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1}=z$ est :

a. $\{(1-i)\}$	b. L'ensemble vide	c. $\{(1-i);(1+i)\}$

Pour $z\neq 1$ **, cette équation équivaut à** $z-2=z(z-1)$ **, c'est à dire** $z^2-2z+2=0$ **.**

Calculons le discriminant du trinôme $\Delta=4-4\times 2=-4=4i^2$ **donc l'équation a deux racines complexes conjuguées qui sont, une fois simplifiées,** $1-i$ **et** $1+i$

4. Soient A et B deux points d'affixes respectives **i** et −1.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i|=|z+1|$ | est :

a. la droite (AB)	b. le cercle de diamètre [AB]	c. la médiatrice de [AB]

$|z-i| = |z+1|$ se traduit $AM=BM$ **, ce qui est équivalent à « M est équidistant de A et B »donc M appartient à la médiatrice de [AB]**

5. Soit le point C d'affixe $1-i$.

L'ensemble des points M d'affixe $z = x + i\,y$ vérifiant $|z-1+i|=|3-4i|$ est :

a. La droite d'équation $y=-x+1$	b. Le cercle d'équation $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$	c. Le cercle de centre C de rayon 5

$|z-1+i| = |3-4i|$ se traduit CM =5 (après calcul du module de $3-4i$ **). Il s'agit donc du cercle de rayon 5, de centre C.**

6. Soit z un nombre complexe ; le module de $z+i$ est égal à :

a. $\lvert z\rvert+1$	b. $\lvert z-1\rvert$	c. $\lvert i\bar{z}+1\rvert$

On vérifie que la proposition c. est exacte $|i\bar{z}+1|=|i\bar{z}-i^2|=|i(\bar{z}-i)|=|i||\bar{z}-i|=|z+i|$ **car** $|i|=1$
et pour tout Z complexe $|Z|=|\bar{Z}|$ **avec ici** $Z=z+i$

EXERCICE 3 **5 points**

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.

L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

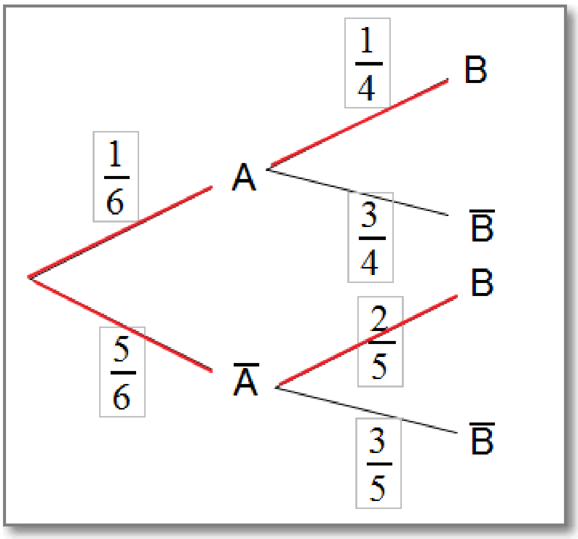
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.

On considère les événements suivants :

A : « obtenir 1 en lançant le dé »

B : « obtenir une boule noire ».

1. a. Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.



b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B) = p(A)\times p_A(B)+p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{24}+\frac{1}{3}=\frac{1}{24}+\frac{8}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$ **= 0,375.**

c. **Sachant que** l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

Il s'agit d'une probabilité conditionnelle :

$$p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{24}\times\frac{8}{3}=\frac{1}{9}.$$

La probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé est $\frac{1}{9}$

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie,la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

Nous reconnaissons un schéma de Bernoulli, avec répétition de 10 parties indépendantes, chaque partie ayant deux issues : Succès « la boule obtenue est noire » de probabilité $p=\frac{3}{8}$ d'après la question précédente et Échec « la boule obtenue est rouge » de probabilité $1-p=\frac{5}{8}$.

Les parties étant indépendantes la variable X suit une loi binomiale de paramètres n = 10 et $p=\frac{3}{8}$.

La loi de probabilité de X est donnée par la formule $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{(n-k)}$.

La probabilité de gagner exactement trois parties est égale à : $p(X=3)=\binom{10}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^7$ ≈ 0,236 au millième près.

b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

On a $p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-\left(\frac{5}{8}\right)^{10}$ ≈0,991 au millième près.

c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$P(X<k)$	0,0091	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,9922	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10.

On considère l'événement : « la personne gagne au moins N parties ».

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet événement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

Expliquez votre démarche. Toute trace de recherche pertinente sera valorisée.

$p(X \geqslant N) = 1 - p(X<N)$. **On cherche donc N tel que** $1 - p(X<N) < 0{,}1$
$1 - p(X<N) < 0{,}1$ **équivaut à** $1 - 0{,}1 < p(X<N)$ **donc** $0{,}9 < p(X<N)$.
D'après le tableau, cette condition est satisfaite à partir de N = 7.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

On considère l'algorithme suivant : Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée

Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement

Affecter à U la valeur 0

Pour k allant de 0 à N −1

Affecter à U la valeur 3U −2k +3

fin pour

Sortie

Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque N =3 ?

Lorsque N = 3, *k* va de 0 à 2 donc l'algorithme effectue trois boucles avant de s'arrêter.
U est initialisé à 0.
Boucle pour $k=0$ **on a** $U=3\times0-2\times0+3=3$ **;**
Boucle pour $k=1$ **on a** $U=3\times3-2\times1+3=10$
Boucle pour $k=2$ **on obtient** $U=3\times10-2\times2+3=29$.
L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$u_1=3u_0-2\times0+3$ **= 3 et** $u_2=3u_1-2\times1+3=3\times3-2+3$ **= 10.**

On reconnaît les calculs faits par l'algorithme !

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel *n*, la propriété P_n **:** « $u_n \geqslant n$ »
Initialisation :
La propriété P_0 **est** « $u_0 \geqslant 0$ » **, c'est vrai car** $0 \geqslant 0$ **.**
Hérédité :
Supposons la propriété P_n **vraie pour une valeur de *n* donnée et montrons que la propriété est alors vérifiée au rang suivant , *n* + 1.**
Autrement dit , montrons que si , pour un *n* donné $u_n \geqslant n$ **alors** $u_{n+1} \geqslant n+1$

Partons donc de l'hypothèse de récurrence $u_n \geqslant n$, les inéquations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{gathered} 3u_n \geqslant 3n \\ 3u_n - 2n \geqslant 3n - 2n \\ 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \\ u_{n+1} \geqslant n+3 \end{gathered}$$

or $n+3 \geqslant n+1$ donc $u_{n+1} \geqslant n+1$ la propriété est donc vérifiée au rang *n* + 1.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, initialisation et hérédité étant vérifiées, on en déduit que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geqslant n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Par théorème de comparaison, puisque $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ et que pour tout *n* , $u_n \geqslant n$ alors $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel *n,* déterminons le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$ avec $u_n - n \geqslant 0$ d'après la question précédente , donc $u_{n+1} - u_n$ est la somme de deux termes positifs donc , pour tout *n* entier naturel $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $v_n = u_n - n + 1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1$ = $3(u_n - n + 1)$ = $3v_n$.
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$ et de raison 3.

b) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $u_n = 3^n + n - 1$.

On utilise l'expression de v_n en fonction de *n* : terme général d'une suite géométrique de raison 3, de premier terme 1.
Pour tout entier naturel *n*, $v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$ et par définition, $u_n = v_n + n - 1$ donc $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit *p* un entier naturel non nul.

a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc quelque soit A , réel aussi grand que l'on veut, il existe un rang à partir duquel u_n dépasse A.

Ici $A = 10^p$, on peut donc affirmer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant 10^p$.

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

b) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p=3$.

$u_6 = 734$ et $u_7 = 2193 \geqslant 1000$ donc pour la valeur $p=3$; $n_0 = 7$.

c) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Entrée

Saisir le nombre entier naturel non nul p.

Initialisation

Affecter à U la valeur 0

Affecter à N la valeur 0

Traitement

Tant que U < 10^p

Affecter à U la valeur 3U − 2N + 3

Affecter à N la valeur N + 1

Fin tant que

Sortie

Afficher N