TS . 2014/2015. Lycée Prévert. Corrigé du devoir commun du premier trimestre.
Durée : 3 heures. Vendredi 14/11/2014

Exercice 1 : (7 pts).

A) Étudier les limites suivantes :

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-8}{2n^2+5}$.

Il s'agit d'une forme indéterminée de la forme « $\frac{+\infty}{+\infty}$ » car $\lim_{n\to+\infty} 3n^2-8=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 2n^2+5=+\infty$.
Dans ce cas la méthode de factorisation par le terme de plus haut degré permet de lever l'indétermination
Ici , nous factorisons simplement par n^2 le numérateur et le dénominateur :

Pour tout $n>0$: $\frac{3n^2-8}{2n^2+5}=\frac{n^2\left(3-\frac{8}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{3-\frac{8}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}}$

or pour tout a réel , $\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n^2}=0$ donc, par somme , $\lim_{n\to+\infty} 3-\frac{8}{n^2}=3$ et $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{5}{n^2}=2$

donc, par propriété de la limite d'un quotient $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-8}{2n^2+5}=\frac{3}{2}$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{5-(-1)^n}{n^2+1}$

Le numérateur n'a pas de limite mais oscille entre 4 et 6 et le dénominateur tend vers + l'infini, donc , intuitivement , on peut penser que la limite est zéro. Démontrons-le en utilisant un encadrement.
Pour tout n entier naturel : $-1\leqslant(-1)^n\leqslant1$
Multiplions les membres de la double inégalité par -1 : l'ordre change !

$1\geqslant-(-1)^n\geqslant-1$

ajoutons 5 : $6\geqslant5-(-1)^n\geqslant4$

Divisons par n^2+1 strictement positif donc l'ordre ne change pas.

$$\frac{6}{n^2+1}\geqslant\frac{5-(-1)^n}{n^2+1}\geqslant\frac{4}{n^2+1}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2+1}=0$.

Donc d'après le théorème d'encadrement, on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{5-(-1)^n}{n^2+1}=0$

B) Vrai ou Faux à justifier :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$. Cette suite a pour limite 3.

Montrons que la proposition est vraie.
Écrivons u_n sans le symbole $\sum$ que certains ne comprennent pas bien.

$$u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Ainsi nous reconnaissons la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, de

premier terme $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

Nous utilisons la formule démontrée en cours : $u_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}=3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$ **car** $0<\frac{2}{3}<1$ **donc** $\lim_{n\to+\infty}1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=1$ **donc, par produit** $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$

C) Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$.

Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que cette suite est minorée par 0, majorée par 2 , et est croissante.

Nous allons faire un seul raisonnement par récurrence :
Notons $\mathrm{P}(n)$ **la propriété** $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$
Montrons en raisonnant par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n **.**

♦ Initialisation
Pour $n=0$**,** $\mathrm{P}(0)$ **:** $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 2$ **est vraie car** $u_0=0$ **,** $u_1=\sqrt{2}$ **et** $0\leqslant 0\leqslant\sqrt{2}\leqslant 2$

♦ Hérédité.
Supposons que pour un n **donné ,** $n\geqslant 0$**, on ait :** $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$**, montrons qu'alors** $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 2$
Partons de notre hypothèse de récurrence : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$
Ajoutons 2 à tous les membres : $2\leqslant u_n+2\leqslant u_{n+1}+2\leqslant 4$
Tous les membres de cette triple inégalité sont positifs, on peut donc appliquer la fonction racine carrée qui ne modifie pas l'ordre car cette fonction est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
$\sqrt{2}\leqslant\sqrt{u_n+2}\leqslant\sqrt{u_{n+1}+2}\leqslant\sqrt{4}$ **donc** $0\leqslant\sqrt{2}\leqslant\sqrt{u_n+2}\leqslant\sqrt{u_{n+1}+2}\leqslant 2$
donc par définition $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 2$**. L'hérédité est ainsi établie.**

♦ Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, la proposition étant initialisée et héréditaire est vraie pour tout entier naturel. La suite (u_n) **est bien minorée par 0 , majorée par 2 et croissante.**

D) Démonstration de cours

Démontrer que **si** (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : $\begin{cases}u_n\leqslant v_n \quad \textit{à partir d'un certain rang}\\ \lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty\end{cases}$

alors $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

Traduisons les données :

- **Il existe un rang** n_0 **tel que pour tout entier naturel** n **,** $n\geqslant n_0$ **entraine** $v_n\geqslant u_n$**.**
- **Pour tout intervalle ouvert de la forme** $]\mathrm{A};+\infty[$**, A aussi grand que l'on veut, il existe un rang** n_1 **tel que, pour tout entier naturel** n**,** $n\geqslant n_1$ **entraine** $u_n\in]A;+\infty[$**.**

Notons $n_2=max(n_0,n_1)$
Pour tout entier naturel n**,** $n\geqslant n_2$ **entraine donc** $u_n>\mathrm{A}$ **car** $n\geqslant n_1$ **et** $v_n\geqslant u_n>A$ **car** $n\geqslant n_0$
Donc, pour tout A réel, il existe un entier naturel, n_2 **tel que ,** $n\geqslant n_2$ **entraine** $v_n>A$ **, c'est à dire** $v_n\in]A;+\infty[$**. Autrement dit,** $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$

Exercice 2 : (5 pts).

Une grande marque de cosmétiques fabrique et commercialise des parfums haut de gamme.
Il existe, sur le marché, des contrefaçons de ces parfums. Un parfum contrefait est une copie du parfum original, il est en général de moindre qualité mais beaucoup moins cher.
On note p la proportion de flacons de parfum contrefaits sur le marché des parfums en France.

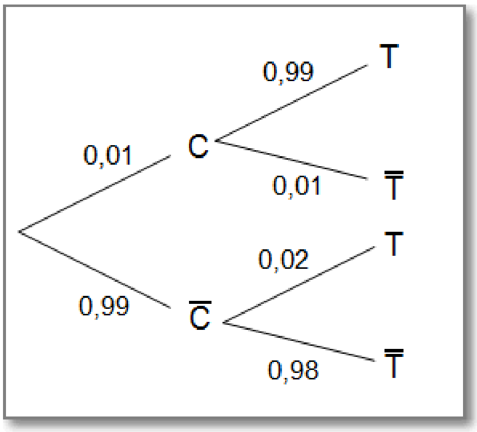
Partie A

On suppose dans cette partie que $p=1\%$
Pour éliminer ces contrefaçons, la marque a mis au point un test optique permettant, sans rompre le ruban de garantie, de se faire une opinion concernant la conformité d'un parfum. On dit que le test est positif lorsqu'il indique que le flacon contient un parfum contrefait.
Les caractéristiques de ce test sont les suivantes :

- La probabilité que le test soit positif sachant que le parfum est une contrefaçon, est égale à 0,99
- La probabilité que le test soit négatif sachant que le parfum est authentique, est égale à 0,98

On notera C : l'événement « le parfum est contrefait» ;
T : l'événement « le test est positif ».
On prend un flacon au hasard et on le soumet au test.

1. Construire un arbre pondéré traduisant les informations de l'énoncé.



L'énoncé nous indique que :
$p(\mathrm{C})=0{,}01$ **donc** $p(\overline{\mathrm{C}})=1-p(\mathrm{C})=0{,}99$

$p_{\mathrm{C}}(\mathrm{T})=0{,}99$ **donc** $p_{\mathrm{C}}(\overline{T})=1-p_{\mathrm{C}}(T)=0{,}01$

$p_{\overline{C}}(\overline{T})=0{,}98$ **donc** $p_{\overline{C}}(T)=1-p_{\overline{C}}(\overline{T})=0{,}02$

2. On appelle valeur diagnostique du test la probabilité que le parfum soit contrefait sachant que le test est positif. Déterminer la valeur diagnostique de ce test. Qu'en pensez-vous ?

La valeur diagnostique du test est $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{C})$ **.**

Cette valeur n'est pas directement lisible sur l'arbre pondéré mais nous savons que $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{C})=\dfrac{p(C\cap T)}{p(T)}$

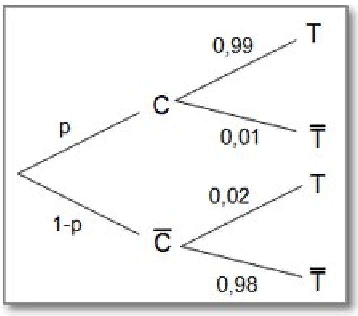
$p(\mathrm{C}\cap\mathrm{T})=p(\mathrm{C})\times p_{\mathrm{C}}(\mathrm{T})=0{,}01\times 0{,}99=0{,}0099$
$p(\mathrm{T})=p(\mathrm{C}\cap\mathrm{T})+p(\overline{\mathrm{C}}\cap\mathrm{T})=0{,}0099+0{,}99\times 0{,}02=0{,}0297$

donc $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{C})=\dfrac{p(C\cap T)}{p(T)}=\dfrac{0{,}01\times 0{,}99}{0{,}01\times 0{,}99+0{,}99\times 0{,}02}=\dfrac{0{,}01}{0{,}01+0{,}02}=\dfrac{0{,}01}{0{,}03}=\dfrac{1}{3}$

La probabilité qu'un flacon soit contrefait sachant que le test est positif est faible , seulement 33 %.
Autrement dit 67 % des flacons ayant donné un test positif sont authentiques.
Le test n'est donc pas très fiable.

Partie B

Déterminer la valeur minimale de p pour que la valeur diagnostique du test dépasse 90 %



Calculons la valeur diagnostique en fonction de p **:**
$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{C})=\dfrac{p(C\cap T)}{p(T)}=\dfrac{0{,}99\times p}{(0{,}99\times p)+(0{,}02(1-p))}$

Donc on cherche p **tel que :** $\dfrac{0{,}99\times p}{(0{,}99\times p)+(0{,}02(1-p))}>0{,}9$

Résolvons cette inéquation (I) : $\dfrac{0{,}99\,p}{0{,}97\,p+0{,}02}>0{,}9$

Le dénominateur est strictement positif puisque p est compris entre 0 et 1, on peut donc multiplier par $0{,}97\,p+0{,}02$ les deux membres de l'inégalité sans changer l'ordre :

(I) équivaut à $0{,}99\,p>0{,}9(0{,}97\,p+0{,}02)$ c'est à dire $0{,}99\,p>0{,}873\,p+0{,}018$

donc $0{,}117\,p\geqslant 0{,}018$ d'où $p\geqslant\dfrac{0{,}018}{0{,}117}=\dfrac{2}{13}\approx 0{,}154$

Dès que la proportion de flacons de parfum contrefaits sur le marché dépasse environ 15 , 4 %, la valeur diagnostique du test dépasse 90 %. Le test est beaucoup plus fiable dans ces conditions.

Exercice 3 : (8 pts).

Soit la suite numérique (u_n) définie sur ℕ par :

$u_0=2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1$.

Partie 1 : Sens de variation de la suite (u_n)

a. Montrer que $u_1=\dfrac{7}{3}$, puis calculer de même u_2, u_3 et u_4. On en donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

On remplace n par 0 dans la définition de u_{n+1} pour obtenir u_1 :

$$u_1=\frac{2}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times 0+1=\frac{7}{3}\approx 2{,}33$$

De même :

$$u_2=\frac{2}{3}\times\frac{7}{3}+\frac{1}{3}\times 1+1=\frac{26}{9}\approx 2{,}88$$

$$u_3=\frac{2}{3}\times\frac{26}{9}+\frac{1}{3}\times 2+1=\frac{52}{27}+\frac{2}{3}+1=\frac{52+18+27}{27}=\frac{97}{27}\approx 3{,}59$$

$$u_4=\frac{2}{3}\times\frac{97}{27}+\frac{1}{3}\times 3+1=\frac{194}{81}+\frac{162}{81}=\frac{356}{81}\approx 4{,}39$$

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

Cette suite semble croissante.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$.

Par définition $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1$ donc $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1-u_n=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+\dfrac{3}{3}-\dfrac{3u_n}{3}$

donc $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-1}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+\dfrac{3}{3}$

on factorise par $\dfrac{1}{3}$ pour obtenir l'expression demandée : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n\leqslant n+3$.

♦ Initialisation :

Pour $n=0$: $u_0\leqslant 0+3$ vrai car $2\leqslant 3$

♦ Hérédité :

Supposons que pour un n donné, $n\geqslant 0$, on ait : $u_n\leqslant n+3$, montrons qu'alors $u_{n+1}\leqslant(n+1)+3$

Partons de notre hypothèse de récurrence : $u_n\leqslant n+3$

Multiplions par $\dfrac{2}{3}$: $\dfrac{2}{3}u_n\leqslant\dfrac{2}{3}n+2$

Ajoutons $\frac{1}{3}n+1$: $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leqslant\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}n+3$
Nous obtenons : $u_{n+1}\leqslant n+3$ donc $u_{n+1}\leqslant n+4$
L'hérédité est bien vérifiée.
♦ Conclusion
D'après l'axiome de récurrence, la propriété « $u_n\leqslant n+3$ » étant initialisée et héréditaire , est vraie pour tout entier naturel.

e. En déduire une validation de la conjecture faite à la question b.

Montrons que la suite (u_n) est croissante en utilisant les deux questions précédentes
Pour tout n , $u_n\leqslant n+3$ donc $0\leqslant n+3-u_n$ donc $0\leqslant\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ donc $0\leqslant u_{n+1}-u_n$
Ceci prouve la croissance de la suite (u_n) .

Partie 2 : Expression explicite de u_n et limite de u_n

On désigne par (v_n) la suite définie sur ℕ par $v_n=u_n-n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Nous devons prouver que $v_{n+1}=r\,v_n$, r étant une constante indépendante de n
Par définition, pour tout n : $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)$ donc $v_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)u_n+\left(\frac{1}{3}\right)n+1-1-n$
donc $v_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)u_n-\left(\frac{2}{3}\right)n$. On factorise par $\frac{2}{3}$: $v_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)(u_n-n)$ donc $v_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)v_n$
Ceci prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-0=2$
donc son expression explicite est $v_n=v_0(r)^n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$
$v_n=u_n-n$ équivaut à $u_n=v_n+n$ c'est à dire $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Nous avons déjà vu dans l'exercice 1 :
$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ car $0<\frac{2}{3}<1$ donc, par produit $\lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$
D'autre part $\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$ donc par addition $\lim_{n\to+\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n=+\infty$
La suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Partie 3: Algorithme et somme des premiers termes de la suite (u_n)

Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$, autrement dit $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$

a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche S_n lorsque l'utilisateur saisit n .

Entrée : Saisir N
Initialisation : Affecter à la variable S la valeur 2
Traitement : Pour K allant de 1 à N,
la variable S prend la valeur $S+2\left(\frac{2}{3}\right)^K+K$
Fin Pour
Sortie : Afficher S

Vérifier le fonctionnement de votre algorithme à la main ou avec la calculatrice en calculant S_4 .

A la main, à l'aide des valeurs obtenues dans la partie 1, on calcule $S_4=u_0+u_1+u_2+u_3+u_4=\frac{1232}{81}\approx 15{,}21$

On peut faire un tableau pour faire fonctionner l'algorithme , étape après étape :

N	K	S	Commentaires
			Initialisation
4		2	$S_0=u_0=2$
			Traitement
	1	$2+2\left(\frac{2}{3}\right)^1+1=\frac{13}{3}$	$S_1=u_0+u_1=\frac{13}{3}$
	2	$\frac{13}{3}+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+2=\frac{65}{9}$	$S_2=u_0+u_1+u_2=\frac{65}{9}$
	3	$\frac{65}{9}+2\left(\frac{2}{3}\right)^3+3=\frac{292}{27}$	$S_3=u_0+u_1+u_2+u_3=\frac{292}{27}$
	4	$\frac{292}{27}+2\left(\frac{2}{3}\right)^4+4=\frac{1232}{81}$	$S_4=u_0+u_1+u_2+u_3+u_4=\frac{1232}{81}$
			Sortie
L'algorithme affiche $S_4=\frac{1232}{81}\approx 15{,}21$			

b) En utilisant l'expression explicite de u_n , exprimer S_n en fonction de n ,(☺ sans symbole $\sum$ ni $\ldots+\ldots$)

$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(2\times\left(\frac{2}{3}\right)^k+k\right)=2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}k$ **. On retrouve une somme vue dans l'exercice 1.**

$S_n=2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}+\frac{n(n+1)}{2}$ **d'où** $S_n=6-6\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}$