Corrigé du devoir commun n°1 Tle S

Ex 1 :

1°) On considère un intervalle de la forme $]-\infty;\mathrm{A}[$ avec A réel.

$ax+b<\mathrm{A}$

$\Leftrightarrow\ ax<\mathrm{A}-b$

$\Leftrightarrow\ x>\dfrac{\mathrm{A}-b}{a}$ car $a<0$

On pose $\mathrm{X}=\dfrac{\mathrm{A}-b}{a}$.

Ainsi tout intervalle de la forme $]-\infty;\mathrm{A}[$ contient tous les $ax+b$ dès que $x>\mathrm{X}$ (c'est à dire pour x assez grand).

Cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=-\infty$

2°) T tangente au point d'abscisse a d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici, $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$ et donc $f'(a)=2a$

D'où : $y=2a(x-a)+a^2=2ax-2a^2+a^2=2ax-a^2$

Ex 2 :

a) Faux , $u_n=\dfrac{-1}{n+1}$ strictement croissante sur $\mathbb{N}$mais converge vers 0. (On peut aussi faire un schéma)

b) $\mathrm{i}^2=-1$, le carré du complexe i est réel mais mais la partie imaginaire de i n'est pas nulle donc Faux.

c) Si l'équation a deux solutions, celles-ci s'écrivent $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

On a $z_1+z_2=\dfrac{-2b}{2a}=\dfrac{-b}{a}$ donc Faux

d) $(-2+2\mathrm{i})^4=2^4(-1+\mathrm{i})^4 = 16(-1+\mathrm{i})^2(-1+\mathrm{i})^2 =$
$16(1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)(1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)=16(-2\mathrm{i})(-2\mathrm{i})=-64$ c'est un réel donc Vrai.

e) $\dfrac{z-4}{\mathrm{i}z+3}=2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ z-4=2\mathrm{i}(\mathrm{i}z+3)$

$\Leftrightarrow\ z-4=-2z+6\mathrm{i}$

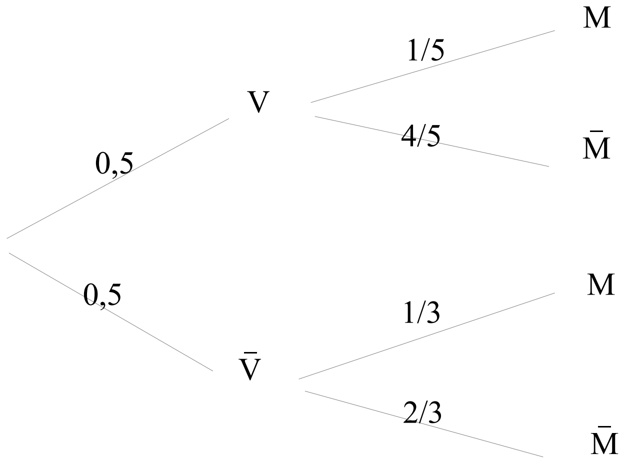
$\Leftrightarrow\ 3z=4+6\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow\ z=\dfrac{4}{3}+2\mathrm{i}$ donc Faux

Ex 3 :

1°) Par lecture de l'énoncé : $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{M})=\dfrac{1}{5}$, $p_{\bar{\mathrm{V}}}(\mathrm{M})=\dfrac{1}{3}$, $p(\mathrm{V})=\dfrac{1}{2}$

2°)



3°) $p(\mathrm{M})=p(\mathrm{M}\cap\mathrm{V})+p(\mathrm{M}\cap\bar{\mathrm{V}})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$

4°) $p(\bar{\mathrm{M}})=1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$

Ainsi :

$$p_{\bar{\mathrm{M}}}(\mathrm{V}) = \frac{p(\bar{\mathrm{M}}\cap\mathrm{V})}{p(\bar{\mathrm{M}})} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}}{\frac{11}{15}}=\frac{6}{11}$$

Ex 4 :

1. $\Delta=-11$; 2 solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-(-7)-i\sqrt{11}}{2\times3}=\frac{7-i\sqrt{11}}{6}$ et $z_2=\overline{z_1}=\frac{7+i\sqrt{11}}{6}$

2. On souhaite résoudre l'équation (E) : $3z^3-z^2-9z+10=0$

   a) $3\times(-2)^3-(-2)^2-9\times(-2)+10=0$ Donc -2 est une solution de (E).

   b) $(z+2)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+2az^2+2bz+2c=az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$

   Donc par identification des polynômes, on a : $a=3$; $b+2a=-1\Leftrightarrow b=-7$ et $2c=10\Leftrightarrow c=5$

   On a donc : $3z^3-z^2-9z+10=(z+2)(3z^2-7z+5)$

   c) (E) $\Leftrightarrow(z+2)(3z^2-7z+5)=0\Leftrightarrow(z=-2\ \ ou\ \ z=\frac{7-i\sqrt{11}}{6}$ ou $z=\frac{7+i\sqrt{11}}{6}$)

Ex 5 :

1°) $x^2+1\neq0$ pour tout x réel donc $\mathrm{D}_f=\mathbb{R}$

2°) $f(x)$ de la forme $\frac{1}{u(x)}+2$ donc $f'(x)=\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}+0=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

3°) Pour tout x réel, $(x^2+1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x$ sur $\mathbb{R}$

Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$Signe\ de\ f'(x)$		$+$	0	$-$	
$Variation\ de\ f$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

3°) a) D'après l'extrait du tableur de la calculatrice ci-dessous :

x	f(x)
9	2,0121
10	2,0099

$\mathrm{X}=10$ convient.

Pour $x>10$, on a : $1{,}99<f(x)<2{,}01$

b) $f(x)\in \mathrm{I}$

$\Leftrightarrow\ 2-\alpha<\frac{1}{x^2+1}+2<2+\alpha$

$\Leftrightarrow\ -\alpha<\frac{1}{x^2+1}<\alpha$

$\Leftrightarrow\ 0<\frac{1}{x^2+1}<\alpha$

$\Leftrightarrow\ x^2+1>\frac{1}{\alpha}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{\alpha}-1$ avec $\frac{1}{\alpha}-1>0$ car $0<\alpha<1$

$\Leftrightarrow x>\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

c) Tout intervalle de la forme $]2-\alpha;2+\alpha[$ contient tous les $f(x)$ pour x assez grand ($x>\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}$)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

Ainsi, la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=2$.

4°) a) T a une équation de la forme $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=\frac{-1}{2}(x-1)+3 = \frac{-1}{2}x+3$

b) $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right) = \frac{1}{x^2+1}+2+\frac{1}{2}x-3 = \frac{1}{x^2+1}+0{,}5x-1 = \frac{1+(0{,}5x-1)(x^2+1)}{x^2+1}$

Ainsi : $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right) = \frac{0{,}5x^3-x^2+0{,}5x}{x^2+1} = \frac{0{,}5x(x^2-2x+1)}{x^2+1} = \frac{0{,}5x(x-1)^2}{x^2+1}$

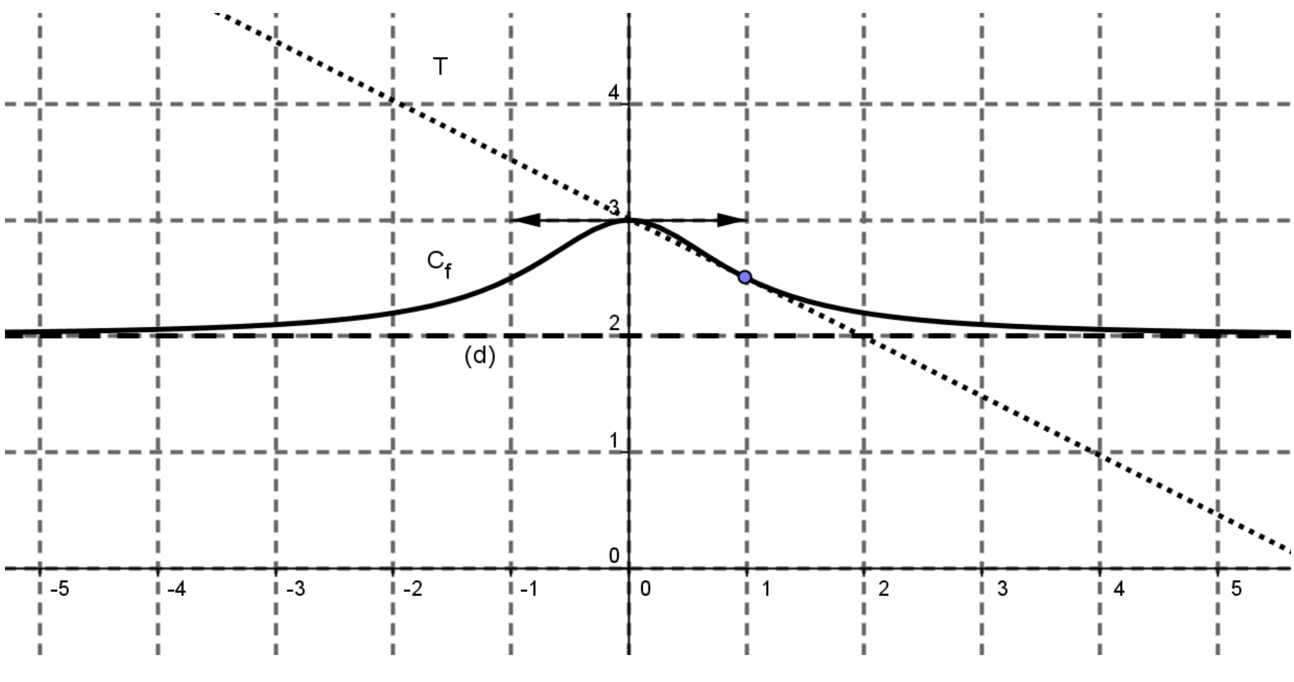
c) On réalise un tableau de signes :

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
Signe de $0{,}5x$	-	0	+		+	
Signe de $(x-1)^2$	+		+	0	+	
Signe de x^2+1	+		+		+	
Signe de $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)$	-	0	+		+	
Position	C_f Sous T		C_f dessus		C_f dessus	

5°)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,04	2,06	2,1	2,2	2,5	3	2,5	2,2	2,1	2,06	2,04

6°)



Ex 6 :

Partie A :

L'algorithme n°1 ne convient pas, car à chaque itération dans la boucle u reprend la valeur $\frac{1}{2}$, donc l'affichage $\frac{1}{2}$ sera répété n fois.

L'algorithme n°3 ne convient pas, car la commande « Afficher u » étant après la boucle, il n'affichera que la valeur finale de u, c'est-à-dire u_n.

C'est donc l'algorithme n°2 qui convient et pour n=3 l'affichage en sortie sera : $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$.

Partie B :

1) Il semble que les termes de la suite (u_n) soient tous compris entre 0,5 et 0 ; que la suite soit décroissante et qu'elle converge vers 0.
2) Pour tout entier naturel n non nul, notons $P(n)$ la proposition : « u_n est strictement positif ».
   - $u_1=\frac{1}{2}$, donc $u_1>0$. Donc $P(1)$ est vraie.
   - Soit $n\in N^*$. Supposons $P(n)$ vraie et montrons qu'alors $P(n+1)$ l'est aussi.

   On a : $u_n>0$ d'où $\frac{n+1}{2n}u_n>0$ car $\frac{n+1}{2n}>0$. Ainsi on a : $u_{n+1}>0$.

   Donc $P(n+1)$ est vraie et P est héréditaire.
   - Ccl : $P(1)$ est vraie et P est héréditaire donc, d'après un raisonnement par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier non nul, c'est-à-dire pour tout entier n non nul, u_n est strictement positif.
3) Quel que soit $n\in N^*$, on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{2n}u_n-u_n=\frac{1-n}{2n}u_n$.

   Or pour $n\geq 1$ on a : $1-n\leq 0$ et $2n>0$ d'où $\frac{1-n}{2n}\leq 0$ et $u_n>0$.

   Donc par produit $\forall\ n\in N^*,\ u_{n+1}-u_n\leq 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante.
4) On sait que tous les termes de la suite sont strictement positifs donc la suite (u_n) est minorée par 0. De plus la suite est décroissante, donc elle est majorée par son 1er terme : $u_1\geq u_2\geq\ldots\geq u_n\geq u_{n+1}\geq\ldots$

   La suite (u_n) est donc bornée, avec comme bornes 0 et $\frac{1}{2}$.

Partie C :

1) Quel que soit n entier naturel non nul, on a :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}\times n+1}{2n}u_n=\frac{1}{2n}u_n=\frac{1}{2}\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}v_n .$$

   Donc la suite (v_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$.

2) Ainsi pour tout entier n non nul, on a : $v_n= v_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n}$.

   Or $\forall n\in N^*,\ v_n=\frac{u_n}{n}$, d'où $\forall n\in N^*,\ u_n=v_n\times n=\frac{n}{2^n}$.