

EXERCICE 1**4 points****Commun à tous les candidats**

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.

D'après le cours : $P(X \in [a; b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ où $a > 0$ et $b > 0$.

Donc pour $t > 0$, $P(X \leq t) = e^0 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$.

$$P(X \leq 2) = 0,15 \iff 1 - e^{-\lambda \times 2} = 0,15 \iff 0,85 = e^{-2\lambda} \iff \ln(0,85) = -2\lambda \iff \frac{\ln(0,85)}{-2} = \lambda$$

$$\iff \lambda = -\frac{\ln(0,85)}{2}$$

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ .

2. a. Pour $t > 0$: $P(X \geq t) = 1 - P(X < t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.

Donc $P(X \geq 3) = e^{-3 \times 0,081} \approx 0,78$

- b. Pour tous réels positifs t et h : $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ et $P(X \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = \frac{P[(X \geq t) \cap (X \geq t+h)]}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$$

- c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans.

La probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans est $P_{X \geq 3}(X \geq 3+2)$.

D'après le cours : $P_{X \geq 3}(X \geq 3+2) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0,15 = 0,85$.

- d. D'après le cours, pour une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ , l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Donc $E(X) = \frac{1}{0,081} \approx 12,35$.

Ce qui veut dire que la durée moyenne de vie d'un moteur est de 12,35 années.

3. On considère l'hypothèse (H) : $p = 0,01$ et on la met en doute.

Pour ce faire, on va utiliser un intervalle de fluctuation.

On répète 800 fois, de manière identique et indépendante, une même épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est $p = 0,01$.

Donc la variable aléatoire qui compte le nombre de moteurs défectueux suit la loi binomiale de paramètres $n = 800$ et $p = 0,01$.

On peut donc utiliser l'intervalle de fluctuations au seuil de 95% associé à la loi binomiale (vu en 1^{ère}) que l'on détermine à l'aide de la calculatrice :

On obtient : $I_f = \left[\frac{3}{800} ; \frac{14}{800} \right]$ au seuil de 95%.

La fréquence f de moteurs défectueux observée dans l'échantillon est $f = \frac{15}{800}$

Donc $f \notin I_f$ donc on rejette l'hypothèse (H) : $p = 0,01$ au risque de 5%.

EXERCICE 2 (5 points)**Proposition 1 : VRAIE**

Il suffit de vérifier que les coordonnées des deux points A et B vérifient le système formé des trois équations paramétriques.

Pour $t = 2$ on retrouve les coordonnées du point A, et pour $t = 1$ celles du point B.

Proposition 2 : VRAIE

\mathcal{D} est dirigée par \vec{d} de coordonnées (2, 1, 3) et (AB) par \vec{AB} de coordonnées (-2, 1, 1).

Or $\vec{AB} \cdot \vec{d} = -4 + 1 + 3 = 0$, les vecteurs \vec{AB} et \vec{d} sont donc orthogonaux, les droites \mathcal{D} et (AB) sont donc orthogonales.

Proposition 3 : FAUSSE

Pour savoir si ces deux droites sont coplanaires, il suffit de savoir si elles sont sécantes, car étant orthogonales elles ne pourront pas être parallèles.

Pour cela on résout le système

$$\begin{cases} 2t = 5 - 2t' & (1) \\ 1 + t = -1 + t' & (2) \\ -5 + 3t = -2 + t' & (3) \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient $2t - 6 = -1$ soit $t = \frac{5}{2}$.

On remplace dans (2) : $t' = -2 + t = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.

On vérifie dans (1) : $2t = 5$, alors que $5 - 2t' = 5 - 1 = 4$. Ce qui signifie que ce système n'a pas de solution.

Puisque ces deux droites sont orthogonales et non sécantes, elles seront donc non coplanaires.

Proposition 4 : FAUSSE

On vérifie facilement que $E \in \mathcal{P}$, mais $E \notin \mathcal{D}$.

En effet, si on résout le système

$$\begin{cases} 8 = 2t \\ -3 = 1 + t \\ -4 = -5 + 3t \end{cases}$$

On trouve que $t = 4$ dans la première équation, valeur qui ne convient pas dans la seconde équation.

Proposition 5 : VRAIE

Le vecteur \vec{n} de coordonnées (1, -1, 3) est un vecteur normal au plan \mathcal{P} . Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ont pour coordonnées respectives (2, -1, -1) et (6, 0, -2), d'où

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 + 1 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{AC} = 6 + 0 - 6 = 0$$

\vec{n} est donc normal au plan (ABC).

\mathcal{P} et (ABC) ayant un vecteur normal commun sont donc parallèles.

Commun à tous les candidats

Partie A

1. g est dérivable sur \mathbb{R} comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + e^x$. On a alors $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0 $+$
g			

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x , $g(x) \geq 2 > 0$.

2. Étude en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \text{ donc, par somme : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Étude en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \text{ et, par croissances comparées } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \text{ donc, par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1e^x - xe^x}{(e^x)^2} \\ &= 1 + \frac{e^x(1-x)}{e^x \times e^x} \\ &= 1 + \frac{1-x}{e^x} \\ &= \frac{e^x + 1 - x}{e^x} \\ &= e^{-x} g(x). \end{aligned}$$

4. On a vu plus haut que, pour tout réel x , $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $e^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$	$+\infty$

5. La fonction f est continue sur \mathbb{R} , strictement croissante. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'intervalle \mathbb{R} a pour image \mathbb{R} , ce dernier intervalle contenant 0, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède dans \mathbb{R} une solution α unique.

Par ailleurs, $f(-1) = -e^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc : $-1 < \alpha < 0$.

6. a. La tangente T a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1.$$

- b. Posons, pour tout réel x , $k(x) = f(x) - (2x+1)$, alors :

$$\begin{aligned} k(x) &= x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x+1) \\ &= \frac{x}{e^x} - x \\ &= \frac{x}{e^x} (1 - e^x). \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$1 - e^x$	+	0	-
$k(x)$	-	0	-

On en déduit que \mathcal{C} est située en dessous de T.

Partie B

1. Pour tout réel x :

$$H'(x) = -e^{-x} + (-x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(x+1-1) = xe^{-x} = h(x),$$

la fonction H est donc une primitive de h sur \mathbb{R} .

2. Sur $[1 ; 3]$, \mathcal{C} est en dessous de T, l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_3^4 ((2x+1) - f(x)) dx \\ &= \int_1^3 x - h(x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - H(x) \right]_1^3 \\ &= 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}.\end{aligned}$$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = 2$.
2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1 + i)z_n| = |1 + i| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \sqrt{2}u_n$.
3. D'après le cours, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2(\sqrt{2})^n$; (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} > 1$ et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers $+\infty$.

Variables	: u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	: Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
5. Entrée	: Demander la valeur de p
Traitement	: Tant que $u \leq p$ Faire Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$ Fin du Tant Que
Sortie	: Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1 + i) \times (\sqrt{3} - i) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$.

2. $z_0 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2e^{-i\pi/6}$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$z_1 = 2e^{-i\pi/6} \times \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$$

3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Autre méthode :

Partie B

$$1. z_1 = (1 + i)z_0 = z \times z_0 = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2 = (1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3}) \text{ (Forme algébrique)}$$

$$2. z_0 = \sqrt{3} - i = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})} = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})).$$

$$\text{Preuve : } |z_0| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2 \text{ et } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ d'où } \theta = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})).$$

$$\text{Preuve : } |z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \text{ et } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{Donc } z_1 = (1 + i)z_0 = z \times z_0 \quad \text{donc} \quad |z_1| = |z| \times |z_0| = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Arg}(z_1) &= \text{Arg}(z \times z_0) [2\pi] \\ &= \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z_0) [2\pi] \\ &= \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } z_1 = 2\sqrt{2} (\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12}))$$

$$3. z_1 = (1 + i)z_0 = z \times z_0 = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2 = (1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3}) \text{ (Forme algébrique)}$$

$$\text{Et } z_1 = 2\sqrt{2} (\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})) \text{ (Forme trigonométrique).}$$

Par identification des parties réelles, on déduit :

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}}.$$

EXERCICE 4

5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Au bout d'un an, puisque le bassin B contenait 100 poissons (car $b_0 = 100$), la vente de ces poissons permettra d'en acheter un nombre deux fois plus élevé à mettre dans le bassin A, soit 200. A cela, il faut ajouter les 200 poissons que le pisciculteur achète de toutes façons pour le bassin A. Cela confirme bien $a_1 = 200 + 200 = 400$.

Pour le bassin B, on va commencer par y transférer les 200 poissons qui étaient dans le bassin A (car $a_0 = 200$), auxquels on ajoute les 100 poissons supplémentaires que le pisciculteur achète pour le bassin B, cela confirme bien : $b_1 = 200 + 100 = 300$.

On aura ensuite $a_2 = 2 \times b_1 + 200 = 2 \times 300 + 200 = 800$ et, là encore de façon analogue $b_2 = a_1 + 100 = 400 + 100 = 500$.

2. a. On généralise le raisonnement établi à la question précédente : pour tout entier naturel n , on a :
- $a_{n+1} = 2 \times b_n + 200$: le double du nombre de poissons dans le bassin B l'année précédente, auxquels on ajoute 200 poissons.
 - $b_{n+1} = a_n + 100$: les poissons transférés du bassin A l'année précédente, auxquels on ajoute 100 poissons.

$$\text{On calcule le produit matriciel } AX_n : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

On a donc la somme :

$$AX_n + B = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 200 \\ a_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

b. On a : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$

$$\iff (I_2 - A) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$$

Où la matrice I_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $C = (I_2 - A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de déterminant non nul (le déterminant vaut -1), donc elle est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \iff C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1} \times B$$

$$\text{Calculons le produit } C^{-1} \times B : \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 - 200 \\ -200 - 100 \end{pmatrix}$$

On a donc $S = C^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -400 \\ -300 \end{pmatrix}$, donc les nombres x et y sont respectivement -400 et -300 .

- c. Pour tout entier naturel n , en posant $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$, on pose en fait $Y_n = X_n - S$, où S est la matrice déterminée à la question précédente, solution de l'équation $AX + B = X$, donc telle que $AS + B = S$, ou bien $AS = S - B$. On a donc, pour n entier naturel :

$$\begin{aligned} AY_n &= A \times (X_n - S) \\ &= AX_n - AS \\ &= AX_n - (S - B) \quad \text{car } S \text{ est solution de l'équation } AX + B = X. \\ &= AX_n + B - S \\ &= X_{n+1} - S \quad \text{d'après la relation de récurrence du 2. a.} \\ &= Y_{n+1} \quad \text{d'après la définition de la matrice } Y_n. \end{aligned}$$

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , $Y_{n+1} = AY_n$.

3. a. Soit n un entier naturel. On a :

$$Z_{n+1} = Y_{2 \times (n+1)} = Y_{2n+2} = AY_{2n+1} = A \times (AY_{2n}) = A^2 Y_{2n} = A^2 Z_n.$$

$$\text{Or, on calcule } A^2 : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a donc $A^2 = 2I_2$ et donc $Z_{n+1} = A^2 Z_n = 2I_2 Z_n = 2Z_n$, ce qu'il fallait démontrer.

- b. On admet que pour tout entier n on a $Y_{2n} = 2^n Y_0$. En multipliant à gauche par la matrice A , cette égalité devient : $AY_{2n} = 2^n AY_0$ et, en utilisant la relation de récurrence établie à la question 2. c., cela donne bien : $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$.

On en déduit donc, en utilisant $Y_{2n} = 2^n Y_0$, que pour tout entier n , on a :

$$\begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} a_0 + 400 \\ b_0 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \times 2^n \\ 400 \times 2^n \end{pmatrix}, \text{ donc en particulier :} \\ a_{2n} + 400 = 600 \times 2^n, \text{ soit } a_{2n} = 600 \times 2^n - 400.$$

Puis, en utilisant $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$, que pour tout entier n , on a :

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} a_1 + 400 \\ b_1 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \times 2^n \\ 600 \times 2^n \end{pmatrix}, \text{ donc en particulier :} \\ a_{2n+1} + 400 = 800 \times 2^n, \text{ soit } a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. a. L'algorithme suivant demande un entier p à l'utilisateur, et renvoie dans la variable a qui sera affichée le nombre de poissons dans le bassin A au bout de p années. En effet :

— si p est un nombre pair, alors on affecte à n la valeur $\frac{p}{2}$, qui sera donc entière et on a $p = 2n$. On affecte à a la valeur qui est le résultat de la formule pour a_{2n} , c'est à dire a_p , formule établie à la question précédente. Donc si p est pair, à la fin de l'algorithme, a contient le nombre de poissons au bout de p années.

— si p est un nombre impair, alors $p - 1$ est pair et n est l'entier $\frac{p-1}{2}$ et donc $2n = p - 1$, soit $p = 2n + 1$. Et comme on affecte à a la valeur obtenue en appliquant la formule obtenue à la question précédente pour calculer a_{2n+1} , à nouveau, la valeur renvoyée sera a_p .

- b. On peut modifier de façon assez basique l'algorithme présenté précédemment pour l'inclure dans une boucle :

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 200 Affecter à p la valeur 0.
Traitement :	Tant que $a \leq 10000$: Affecter à p la valeur $p + 1$ Si p est pair Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$ Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$. Sinon Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$ Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$. Fin de Si. Fin de Tant que Affecter à p la valeur $p - 1$
Sortie :	Afficher p .

Cet algorithme initialise les variables a à a_0 et p à 0. Après chaque itération de la boucle "Tant que", p aura été incrémenté de 1, et la variable a aura été recalculée de sorte qu'elle contient la valeur a_p , donc après n itérations, p contient la valeur n et a contient a_n .

On sort de la boucle "Tant que" dès que la valeur dans a est strictement supérieur à 10000, c'est à dire le nombre de poissons pour la première année où le bassin A ne suffira plus, nombre d'années qui est contenu dans la variable p , donc le nombre d'années où le bassin A suffit est un de moins que ce qui est contenu dans la variable p , d'où la dernière affectation de p avant la sortie de l'algorithme.