Ex 1 :

1°) $A_1=\frac{1}{9}$

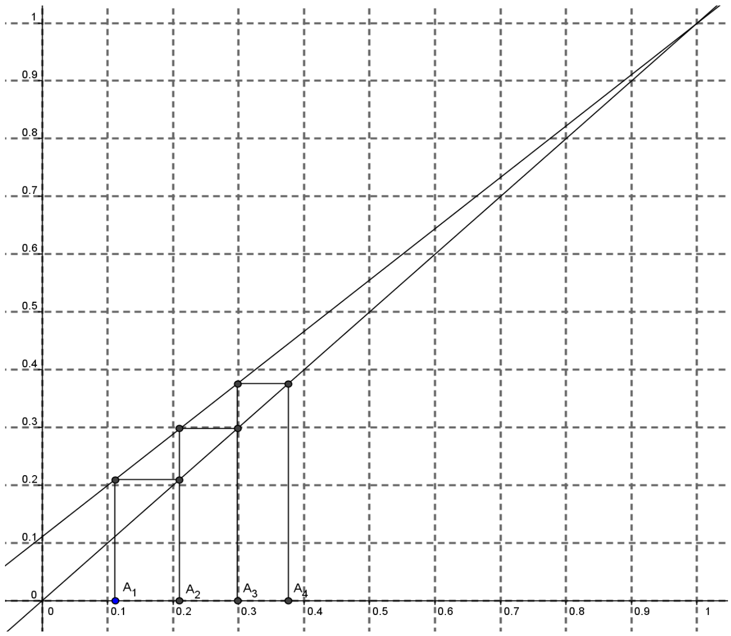
A_2 correspond à A_1 l'aire du 1° carré déjà colorié + $\frac{1}{9}$ des huit autres carrés.

Ainsi, $A_2=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\times\frac{8}{9} = \frac{1}{9}+\frac{8}{81} = \frac{17}{81}$

2°) A_{n+1} est l'aire déjà coloriée (A_n) + $\frac{1}{9}$ de ce qui n'est pas colorié ($1\,m^2-A_n$)

Ainsi : $A_{n+1}=A_n+\frac{1}{9}(1-A_n) = A_n+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}A_n = \frac{8}{9}A_n+\frac{1}{9}$

3°)



4°) a) A l'aide du dessin précédent ou de la calculatrice, la suite (A_n) semble croissante.

b) Il semble que sa limite soit 1.
En effet, sur la calculatrice, on constate que pour de grande valeur de n , A_n se rapproche de 1.

On en déduit qu'au bout d'un grand nombre d'étapes, le carré est quasiment entièrement colorié.

5°) a) $B_n=A_n-1$

$B_{n+1}=A_{n+1}-1$ = ($\frac{8}{9}A_n+\frac{1}{9}$) - 1 = $\frac{8}{9}A_n+\frac{1}{9}-1 = \frac{8}{9}A_n-\frac{8}{9} = \frac{8}{9}$ (A_n-1) = $\frac{8}{9}B_n$

Donc, la suite (B_n) est géométrique de raison $\frac{8}{9}$ et de 1° terme $B_1=A_1-1=-\frac{8}{9}$

b) D'après le a), $B_n=B_1(\frac{8}{9})^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$

c) Ainsi, $A_n=B_n+1 = 1-\left(\frac{8}{9}\right)^n$

d) A l'aide de la calculatrice, $A_{39}\approx 0{,}9898$ et $A_{40}\approx 0{,}991$, donc l'aire coloriée est supérieure à $0{,}99\,m^2$ à partir de $n=40$.

Ex 2 :

1°) On note x le côté du carré et y la longueur du rectangle.
On a $6x+2y=10$ d'où $y=5-3x$
Ainsi, l'aire totale est égale à aire du carré + aire du rectangle c'est à dire :
$A(x)=x^2+x\times y = x^2+x\times(5-3x)=x^2+5x-3x^2=-2x^2+5x$

2°) $A'(x)=-4x+5$

$-4x+5>0 \Leftrightarrow x<\frac{5}{4}$; $-4x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$; $-4x+5<0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{4}$

On obtient ainsi le tableau de variations de la fonction A :

x	0		5/4		10
Signe de f '(x)		+	0	–	
Variation de f	0	↗	25/8	↘	-150

3°) D'après le tableau de variations, le maximum de la fonction f est $\frac{25}{8}$ atteint en $x=\frac{5}{4}$.

L'aire sera donc la plus grande pour $x=1{,}25\,m$.

<u>Ex 3 :</u>

1°) $S_n=1+2+3+\ldots+n$

$S_n=n+(n-1)+\ldots+1$

Ainsi, en ajoutant les deux lignes :

$2S_n=(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)=n(n+1)$ car il y a n termes.

D'où, $S_n=\frac{n(n1)}{2}$

2°)

u est une suite géométrique, on passe d'un terme au suivant en multipliant par r .

Donc : u prend la valeur $u\times r$

S est la somme.

$S_0=u_0$

Donc, pour l'initialisation S prend la valeur u

Et $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$

Ainsi, dans le traitement, S prend la valeur $S+u$

D'où le programme complet :

Entrée

Saisir u

Saisir r

Saisir n

Initialisation

S prend la valeur u

Traitement

Pour i allant de 1 à n

u prend la valeur $u\times r$

S prend la valeur $S+u$

FinPour

Sortie

Afficher S

<u>Ex 4 :</u>

1°) Équation de (AB) de la forme $y=ax+b$ avec $a=\frac{4-2}{-1-1}=-1$

$y=-x+b$

Et comme $A(1;2)$ est sur (AB) : $-1+b=2$ d'où $b=3$

(AB) a pour équation $y=-x+3$

Équation du cercle de centre $I(2;-1)$ et de rayon 2 : $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

Détermination des points d'intersection, on résout le système :

$\begin{cases} y=-x+3 \\ (x-2)^2+(y+1)^2=4 \end{cases}$

Ainsi : $(x-2)^2+(-x+4)^2=4$

C'est à dire : $x^2-4x+4+x^2-8x+16-4=0$

$2x^2-12x+16=0$

Autrement dit : $x^2-6x+8=0$

$\Delta=4$ Deux solutions : $x=2$ ou $x=4$ ce qui donne $y=1$ ou $y=-1$

Les deux points d'intersection sont bien $(2;1)$ et $(4;-1)$. VRAI

2°) Des variations de f on déduit le signe de f'.

f étant croissante sur $[-2{,}5;0]$, f' doit être positive sur cet intervalle.

Or, la fonction proposée est négative sur $[-2{,}5;-2]$.

FAUX

3°) ABCD parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ et donc $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$

D'où, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2$ VRAI

4°) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos 60 = \dfrac{AB^2}{2}$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \cdot (-\overrightarrow{BA}) = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -BC\times BA\times\cos 60 = -\dfrac{AB^2}{2}$

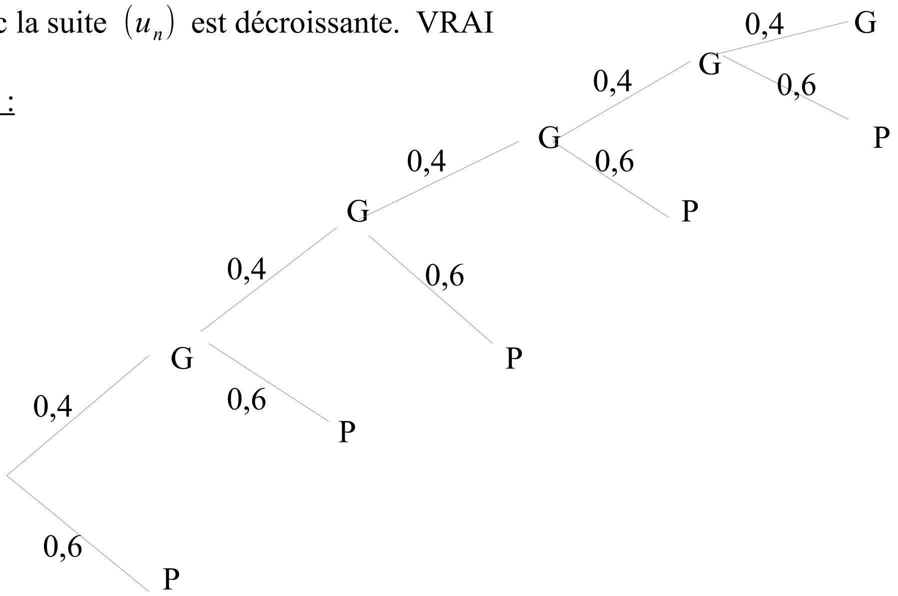
Les produits scalaires sont opposés, donc FAUX.

5°) $u_{n+1}-u_n=-u_n{}^2-1$ qui est négatif.

Donc la suite (u_n) est décroissante. VRAI

Ex 5 :

1°)



2°) X peut prendre les valeurs 0;1;2;3;4 et 5 (de 0 à 5 victoires)

$p(X=0)=0{,}6$ en effet, il perd d'entrée.

$p(X=1)=0{,}4\times 0{,}6=0{,}24$ Car il gagne d'abord puis perd.

Ainsi de suite, on obtient le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	Total
$p(X=x_i)$	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,01536	0,01024	1

3°) p(Noé ne gagne pas le tournoi) = 1-p(Noé gagne le tournoi) = $1-p(X=5)=0{,}98976$

En effet, les deux événements sont contraires.