1°S Corrigé du devoir commun n°2

Exercice 1 :

a) $x \in D_f$ signifie que $1-2x \neq 0$ c'est à dire $x \neq \frac{1}{2}$. Ainsi $D_f = \mathbb{R}$-{ $\frac{1}{2}$ }

b) $f(a)-f(b) = \frac{a}{1-2a} - \frac{b}{1-2b} = \frac{a(1-2b)-b(1-2a)}{(1-2a)(1-2b)} = \frac{a-b}{(1-2a)(1-2b)}$

c) A l'aide de la calculatrice, il semble que f est croissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

Soient a et b tels que $a < b < \frac{1}{2}$. On a $1-2a > 0$, $1-2b > 0$ et $a-b < 0$, ainsi $f(a)-f(b) < 0$

c'est à dire $f(a) < f(b)$. L'ordre est conservé, la fonction est croissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$.

Soient a et b tels que $a > b > \frac{1}{2}$. On a $1-2a < 0$, $1-2b < 0$ et $a-b > 0$, ainsi $f(a)-f(b) > 0$

c'est à dire $f(a) > f(b)$. L'ordre est conservé, la fonction est croissante sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

d) On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variation de f	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

e) $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\left(\frac{h}{1-2h}\right)}{h} = \frac{h}{1-2h} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{1-2h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{1-2h} = 1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

f) Equation de (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ d'où $y = x$

On étudie le signe de $f(x)-x$: $f(x)-x = \frac{x}{1-2x} - x = \frac{x-(1-2x)x}{1-2x} = \frac{2x^2}{1-2x}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x^2$		+	0	+		+	
Signe de $1-2x$		+		+	0	-	
Signe de $f(x)-x$		+	0	+	0	-	
Position de C_f par rapport à (T)		C_f dessus		C_f dessus	‖	C_f dessous	

Exercice 2 :

1)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i \times x_i}{N} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \dots n_p \times x_p}{N} = \frac{n_1}{N} \times x_1 + \frac{n_2}{N} \times x_2 + \dots + \frac{n_p}{N} \times x_p = f_1 \times x_1 + \dots + f_p \times x_p$$

$= \sum_{i=1}^{p} f_i \times x_i$ car pour tout i entre 1 et p, $f_i = \frac{n_i}{N}$

2) A l'aide de la calculatrice.

Pour la classe de Monsieur X : moyenne $\overline{x_1} \approx 10{,}24$ et écart-type $\sigma_1 \approx 4{,}43$

Pour la classe de monsieur Y , on utilise les centres des classes : $\overline{x_2} \approx 10{,}67$ et $\sigma_2 \approx 4{,}91$.

La classe de monsieur Y a une meilleure moyenne ($\overline{x_2} > \overline{x_1}$)

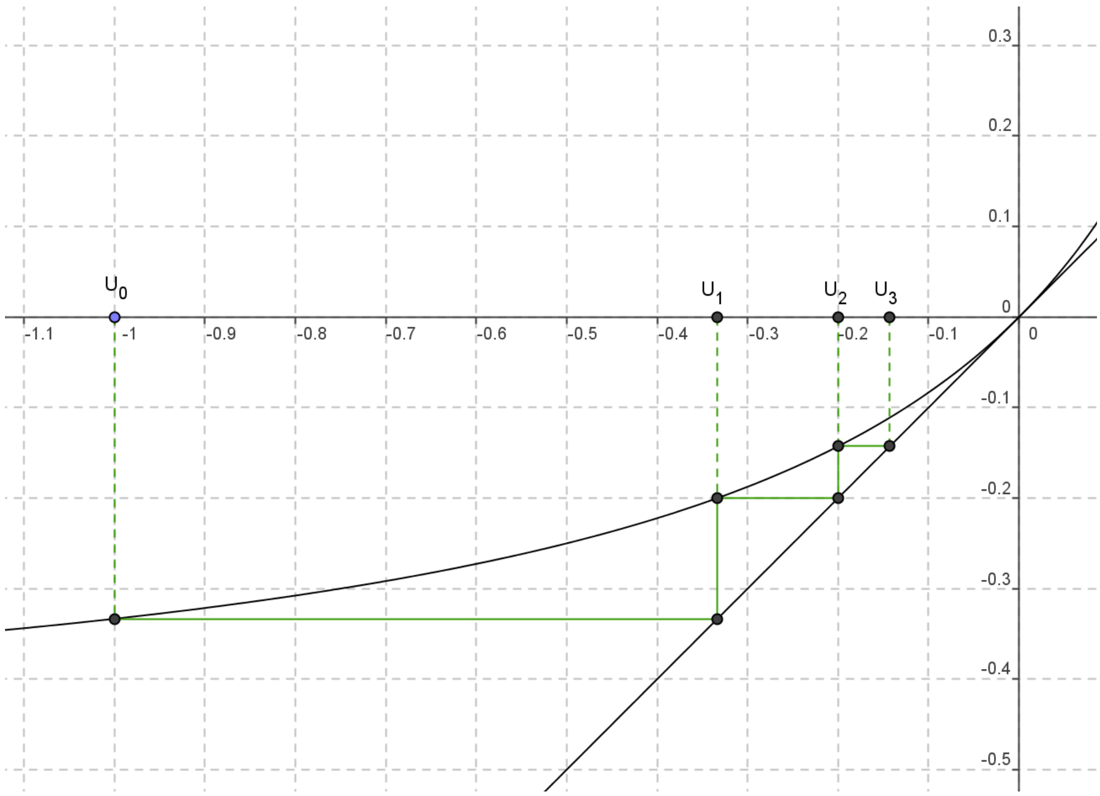
mais les notes sont plus dispersées ($\sigma_2 > \sigma_1$). La classe de monsieur Y semble plus hétérogène.

Mais, ces différences peuvent être dues à la façon de regrouper les notes pour monsieur Y.

Exercice 3 :

1°) $U_1 = \frac{U_0}{1-2U_0} = -\frac{1}{3}$ $\qquad U_2 = \frac{U_1}{1-2U_1} = \frac{\frac{-1}{3}}{1-2\frac{-1}{3}} = \frac{\frac{-1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{-1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}$

2°)



3° a) $V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{-1} = -1$ $\qquad V_1 = \frac{1}{U_1} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$ $\qquad V_2 = \frac{1}{U_2} = \frac{1}{-\frac{1}{5}} = -5$ il semble que la suite soit décroissante

3° b) $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1}{\frac{U_n}{1-2U_n}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1-2U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{1-2U_n-1}{U_n} = \frac{-2U_n}{U_n} = -2 < 0$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} < V_n$ la suite V_n est décroissante .

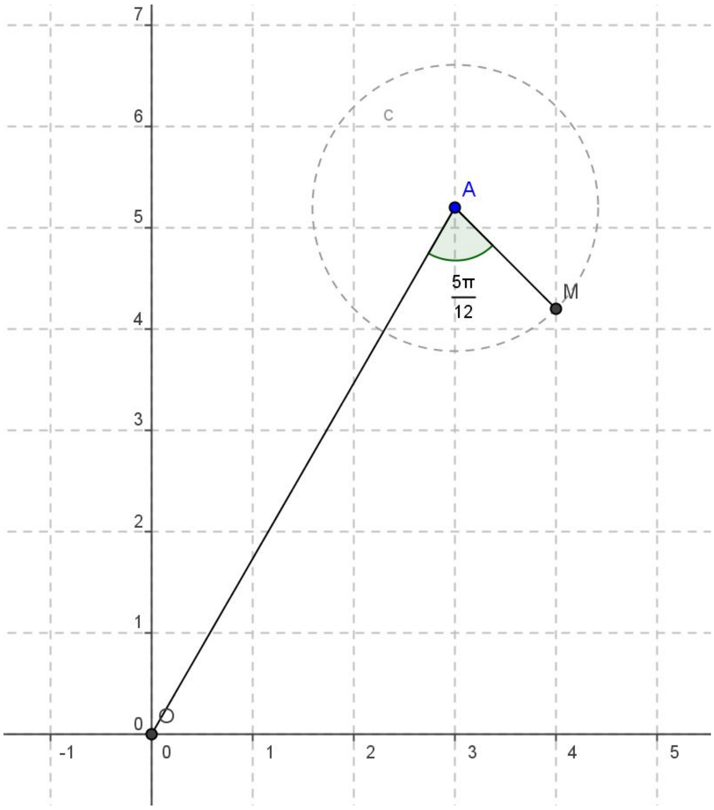
4° Comme $U_n = \frac{1}{V_n}$ $\qquad U_{2011} = \frac{1}{V_{2011}} = \frac{1}{-1-2(2011)} = -\frac{1}{4023}$

Exercice 4 :

1° $OA = \sqrt{9+(3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$$\begin{cases} \cos(\theta)=\dfrac{3}{6} \\ \sin(\theta)=\dfrac{3\sqrt{3}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta)=\dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \quad \underline{\text{conclusion}} \quad A[6;\ \frac{\pi}{3}\ ]$$

2° $\dfrac{5\pi}{12}$ rad $= 5 \times \dfrac{180}{12}\ ° = 75°$



$(\overrightarrow{OA}\ ,\overrightarrow{AM}) = (-\overrightarrow{AO}\ ,\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AO}\ ,\overrightarrow{AM}) - \pi = 5\dfrac{\pi}{12} - \pi = -\dfrac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

3° $(\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{AM}) = (\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}\ ,\overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{3} + -\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{-3\pi}{12} = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

4° a)$(\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{AM}) = (\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et AM=OB donc OB= $\sqrt{2}$ d'où B[$\sqrt{2}$; $-\dfrac{\pi}{4}$]

b) B($\sqrt{2}\cos(-\dfrac{\pi}{4})$; $\sqrt{2}\sin(-\dfrac{\pi}{4})$) donc B(1;-1)

5° $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ Or $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}3+1\\3\sqrt{3}-1\end{pmatrix}$

donc M $\begin{pmatrix}4\\3\sqrt{3}-1\end{pmatrix}$

<u>Exercice 5 :</u>

a) **FAUX** $f'(3)=\dfrac{2}{1}=2$ c'est la pente de (T).

b) **VRAI** La pente de (T) est 2, d'où (T) a pour équation $y=2x+b$. Comme $A(3;1)$ est sur (T), on déduit $b=-5$.

c) **FAUX** $f(x)=0$ pour $x\approx 2{,}3$. C'est $f(0)$ qui est égal à environ $-0{,}9$

d) **VRAI** On peut calculer $f(3{,}01)$ en utilisant l'équation de (T) puisqu'au voisinage du point de C_f d'abscisse 3 , la courbe et sa tangente sont proches.