Devoir commun de Mathématiques
Correction - Premières S

EXERCICE 1 : (4 points) Restitution organisée de connaissances

Dans un repère, (*d*) et (*d* ') sont les droites d'équations cartésiennes respectives :

(*d*) : $ax+by+c=0$, $(a;b)\neq(0;0)$ et (*d* ') : $a'x+b'y+c'=0$, $(a';b')\neq(0;0)$

On note $\vec{u}(-b;a)$ et $\vec{v}(-b';a')$ deux vecteurs directeurs respectifs de (*d*) et (*d* ') et on procède par équivalence (« *si et seulement si* »*indique l'équivalence entre deux propositions*).

(*d*) et (*d* ') sont parallèles ⇔ $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont colinéaires ⇔ $-a'b-(-b')a=0$ (*critère de colinéarité*)⇔ $ab'-a'b=0$

Application :

(*d*) : $-x+3y-5=0$ et (*d*') : $\frac{2}{3}x-2y+4=0$ sont-elles parallèles ? Confondues ?

$a=-1;b=3;a'=\frac{2}{3};b'=-2$

On calcule $ab'-a'b=-1\times(-2)-\frac{2}{3}\times(3)=2-2=0$ donc (*d*) et (*d*') sont parallèles (voire confondues).
Ces droites sont confondues si et seulement si elles ont la même équation réduite :
On obtient les équations réduites en « isolant » *y*
$(d): y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ et $(d'): y=\frac{1}{3}x+2$, on retrouve le même coefficient directeur $\frac{1}{3}$ mais l' ordonnée à l'origine est différente donc ces droites sont strictement parallèles.

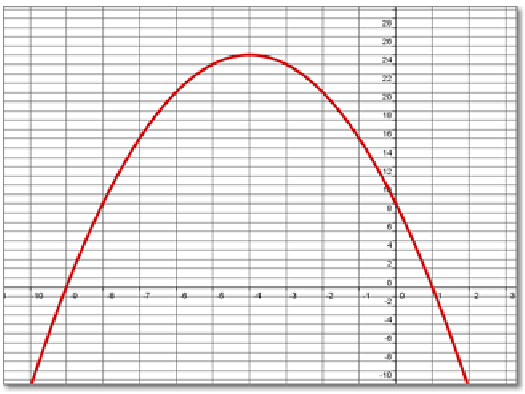
EXERCICE 2 : (4 points) Vrai ou Faux

Pour chaque proposition suivante, dire si elle est vraie ou fausse puis justifier.

a) On peut factoriser le polynôme $7x^2+5x-3$ en facteurs du premier degré :

VRAI
On calcule le discriminant du polynôme : $\Delta=b^2-4ac=25-4\times7\times(-3)=109>0$ donc le polynôme admet deux racines x_1 et x_2 et il se factorise sous la forme $7(x-x_1)(x-x_2)$.

b) La parabole d'équation $y=-x^2-8x+9$ est située au dessous de l'axe des abscisses pour $x\in]-9;1.[$
FAUX
Pour le polynôme $f(x)=-x^2-8x+9$, on vérifie que les racines sont bien – 9 et 1 car $f(-9)=f(1)=0$
On sait qu'un polynôme du second degré ax^2+bx+c est du signe de *a* sauf entre les racines.



Donc(ici $a=-1<0$) *f* est positive pour $x\in]-9;1[$ et donc sa courbe est au dessus de l'axe des abscisses pour $x\in]-9;1[$.
Pensez à vérifier avec votre calculatrice (il faut savoir modifier rapidement la fenêtre graphique pour bien visualiser la courbe)
On pouvait aussi faire un test en calculant l'image de zéro par exemple ou de n'importe quel réel compris entre – 9 et 1

c) L'inéquation $4x^2-8x+4\leqslant0$ n'admet aucune solution réelle.

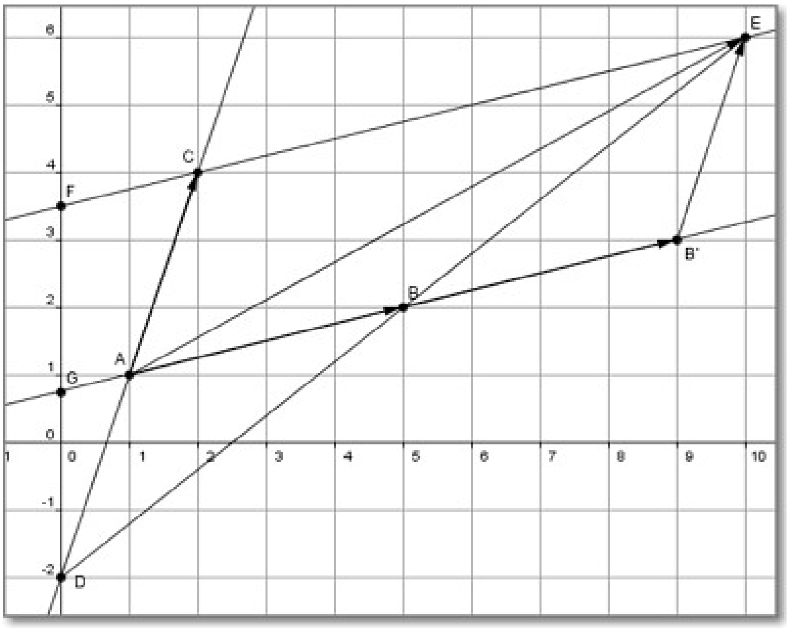
FAUX
Contre exemple : 1 est solution et c'est un réel.(on peut aussi calculer $\Delta=0$ et trouver une racine : 1)

d) Le vecteur $\vec{u}(1+\sqrt{3};-2)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $(1-\sqrt{3})x-y+3=0$:

VRAI
$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{(3)}\end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de la droite d'équation** $(1-\sqrt{3})x-y+3=0$
mais ce n'est pas le seul !!! tous les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ **sont aussi des vecteurs directeurs de cette droite.**
$\vec{u}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ **sont-ils colinéaires ? Le critère de colinéarité est -il vérifié ?**
$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})-1\times(-2)=1-3+2=0$
Donc $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont colinéaires et donc** $\vec{u}$ **est aussi un vecteur directeur de la droite.**

EXERCICE 3 : (4 points). Géométrie dans le plan repéré.

Dans un repère du plan, on considère les points A(1 ; 1), B(5 ; 2) et C(2 ; 4) .



1. Équation cartésienne de (AB).

On calcule au préalable les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **qui est un vecteur directeur de la droite (AB).**

On obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Soit un point $M(x;y)$ **du plan, M appartient à la droite (AB) équivaut à** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ **sont colinéaires, ce qui équivaut à** $1\times(x-1)-4(y-1)=0$
$\Leftrightarrow x-4y+3=0$.
Une équation cartésienne de la droite (AB) est : $x-4y+3=0$

2. Équation cartésienne de (d) parallèle à (AB) passant par C.

La droite (*d*) est parallèle à (AB) donc (*d*) admet $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ **comme vecteur directeur.**

Soit un point $M(x;y)$ **du plan, M appartient à la droite (*d*) équivaut à** $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-4\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ **sont colinéaires, ce qui équivaut à** $1\times(x-2)-4(y-4)=0\Leftrightarrow x-4y+14=0$.
Une équation cartésienne de (*d*) est $x-4y+14=0$.

3. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Voir dessin ci-dessus
4. Montrez par la méthode qui vous convient le mieux :

a) E appartient à (d)

La droite (*d*) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ **et passe par le point C**

donc E appartient à (d) équivaut à $\vec{CE}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires
Or $\vec{CE}=\vec{CA}+\vec{AE}=\vec{CA}+2\vec{AB}+\vec{AC}=2\vec{AB}$ donc $\vec{CE}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires, (***propriété*** $\vec{u}=k\vec{v}$ **) et donc E appartient à (d)**
On pouvait aussi calculer les coordonnées du point E et vérifier que ces coordonnées satisfaisaient l'équation de la droite (d)
b) Le symétrique D de E par rapport à B appartient à la droite (AC)

D est le symétrique de E par rapport à B donc $\vec{DE}=2\vec{DB}$
D appartient à la droite (AC) équivaut à $\vec{DC}$ et $\vec{DA}$ sont colinéaires
Or $\vec{DC}=\vec{DE}+\vec{EC}=2\vec{DB}+2\vec{BA}=2(\vec{DB}+\vec{BA})=2\vec{DA}$ donc $\vec{DC}$ et $\vec{DA}$ colinéaires et donc D appartient à la droite (AC)

EXERCICE 4 : (8 points). Intersection entre une parabole et une droite.

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=2x^2-5x+3$ et (P) sa courbe représentative dans un repère du plan.

Partie A

1. La forme canonique de f :

$$f(x)=2x^2-5x+3=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\right]$$

$$f(x)=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{3}{2}\right]=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{24}{16}\right]=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$

$$f(x)=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

2. Déduction : Le sommet de la parabole a pour coordonnées $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{8}\right)$
   En effet, les coordonnées du sommet de la parabole sont $(\alpha;\beta)$ avec la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ donc $\alpha=\frac{5}{4}$ et $\beta=\frac{-1}{8}$
3. Dressez le tableau de variation de f.

La représentation graphique de f est une parabole tournée vers le haut (a = 2, positif) .D'où le tableau de variation ci-dessous

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
Variations de f	↘	$\frac{-1}{8}$	↗

BONUS : f est croissante sur $\left[\frac{5}{4};+\infty\right[$

En effet pour tous réels a et b de l'intervalle $\left[\frac{5}{4};+\infty\right[$ tels que $\frac{5}{4}\leqslant a<b$ on a :

$f(a)-f(b)=2\left(a-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}-2\left(b-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{8}=2\left[\left(a-\frac{5}{4}\right)^2-\left(b-\frac{5}{4}\right)^2\right]=2\left(a-\frac{5}{4}-b+\frac{5}{4}\right)\left(a-\frac{5}{4}+b-\frac{5}{4}\right)$ **donc**

$f(a)-f(b)=2(a-b)\left(a+b-\frac{10}{4}\right)$ **, étudions le signe de cette différence.**

2 est positif ; $(a-b)$ est négatif et comme $a\geqslant\frac{5}{4}$ et $b>\frac{5}{4}$ on a $a+b>\frac{10}{4}$ donc $a+b-\frac{10}{4}>0$
donc $f(a)-f(b)<0$ c'est à dire $f(a)<f(b)$

Bilan : Pour tous réels *a* et *b*, si $\frac{5}{4} \leqslant a < b$ **alors** $f(a) < f(b)$ **donc *f* est croissante sur** $\left[\frac{5}{4};+\infty\right[$ **puisqu'elle y conserve l'ordre.**

4. Déterminez les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec les deux axes du repère

La parabole coupe l'axe des abscisses lorsque $f(x)=0$ **donc on résout l'équation du second degré :** $2x^2-5x+3=0$ **on calcule** $\Delta = b^2-4ac = 25-4\times2\times3=1>0$ **on a 2 racines** x_1 **et** x_2

x_1 **et** x_2 **correspondent aux abscisses des points d'intersection** $x_1=\frac{5-1}{4}=1$ **et** $x_2=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$

donc les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses sont $(1;0)$ **et** $\left(\frac{3}{2};0\right)$

La parabole coupe l'axe des ordonnées lorsque $x=0$ **; on calcule l'ordonnée du point d'intersection** $f(0)=3$

Donc les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées sont $(0;3)$

Partie B

Pour tout nombre réel *m*, on considère la droite D_m d'équation $y=-2x+m$.

1 . Sur l'annexe

2. Conjectures :

Pour *m* < *1,8* (environ) , la droite D_m **et la parabole** (P) **n'ont pas de point d'intersection**
Pour *m* ≈ *1,8* , la droite D_m **et la parabole** (P) **ont un point d'intersection**
Pour *m* > *1,8* , la droite D_m **et la parabole** (P) **ont 2 points d'intersection**

Démonstration :

Chercher les abscisses des points d'intersection de la droite et la parabole revient à résoudre : $-2x+m=2x^2-5x+3$ **⇔** $2x^2-3x+3-m=0$ **équation du second degré**

On calcule $\Delta=(-3)^2-4\times2\times(3-m)=9-24+8m=-15+8m$

Si $\Delta<0$ **(** $\Delta<0$ **si** $m<\frac{15}{8}$ **) alors il n'y a pas de solutions réelles et donc pas de point d'intersection**

Si $\Delta=0$ **(** $\Delta=0$ **si** $m=\frac{15}{8}$ **) alors une solution et un seul point d'intersection**

Si $\Delta>0$ **(** $\Delta>0$ **si** $m>\frac{15}{8}$ **) alors 2 solutions et 2 points d'intersection.**

$\frac{15}{8}=1{,}875$ **donc ce qui précède est cohérent avec les conjectures faites par lecture graphique.**

3. Dans le cas où $m=\frac{15}{8}$ **on a la solution double** $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{4}$ **et** $y=-2\times\frac{3}{4}+\frac{15}{8}=\frac{3}{8}$ **donc les coordonnées du point d'intersection sont** $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{8}\right)$**.**

La droite est tangente à la parabole en ce point.

4.

b) Montrer que tous les points I_m sont alignés sur une droite dont on donnera l'équation.

On détermine en premier les coordonnées des points d'intersection dans le cas $\Delta>0$ **puis on déterminera les coordonnées des milieux.**

Pour $\Delta>0$ **, les solutions sont** $x_1=\frac{3-\sqrt{8m-15}}{4}$ **et** $x_2=\frac{3+\sqrt{8m-15}}{4}$

Donc les coordonnées des points d'intersection sont $(x_1;-2x_1+m)$ **et** $(x_2;-2x_2+m)$

Donc les coordonnées des milieux sont $\left(\frac{x_1+x_2}{2};m-x_1-x_2\right)=\left(\frac{3}{4};m-\frac{3}{2}\right)$ **donc les milieux ont tous la même abscisse** $\frac{3}{4}$**, donc les milieux** I_m **sont sur la droite d'équation** $x=\frac{3}{4}$**.**

Feuille Annexe pour l' exercice 4, à détacher et à rendre avec la copie

Exercice 4. Partie B