Devoir commun (1[er] trimestre) Première S

Eléments du corrigé

Exercice 1 *Je connais ma leçon et je sais démontrer !*

Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$. ***f est* définie sur** $\mathbb{R}$ **.**

1) ***Soit M(a ; b) un point du plan, M'(x ; y) étant le symétrique de M par rapport à O, O est le milieu de [M'M] par conséquent on a :***

$$\begin{cases} \dfrac{x+a}{2}=0 \\ \dfrac{y+b}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a \\ y=-b \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \overrightarrow{M'O}=\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a \\ y=-b \end{cases}$$

2*)* ***f est impaire, soit*** $M(a;b)$ ***un point de Cf. Montrons que son symétrique par rapport à O est aussi un point de Cf.***

On sait d'après la question 1 que ses coordonnées sont (-a ;-b), f(-a)= - f(a) puisque f est impaire or f(a) = b puisque $M \in Cf$ ***donc f(-a)= -b. cqfd***

Exercice 2 **VRAI ou FAUX ?** *Je connais ma leçon et je sais argumenter !*

1) A(1 ;-4) ; B(5 ;2) ***donc le coefficient directeur de (AB) est :*** $\dfrac{2-(-4)}{5-1}=1{,}5$

et (Δ) : ***y = 1,5x – 7 donc son coefficient directeur est aussi 1,5. C'est donc VRAI !***

2) ***Si x = 1, x²+x+1= 3 donc 1 est solution de l'inéquation : x² + x + 1 > 0 d'où FAUX !***

3) ***a) FAUX ! Si x = -1 alors 1-x² = 0 donc f n'est pas définie en -1.***

b) Vrai ! f(-x)=f(x) donc f est paire.

Exercice 3 *Je sais : déterminer l'équation réduite d'une droite, démontrer que deux droites sont parallèles, déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.*

1) ***L'équation réduite de la droite (AB) est : y = -2x + 12.***

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ***et*** $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ***sont colinéaires (*** $\overrightarrow{AB}=-2\vec{u}$ ***). Donc (d) et (AB) sont parallèles.***

3) (d) est la droite parallèle à (AB) qui contient le milieu de [BC] donc c'est la droite des milieux du triangle ABC, elle coupe [AC] en son milieu d'où E milieu de [AC]. Par définition la droite (BE) est la médiane issue de B du triangle ABC.

4) Pour déterminer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC,

- ***Soit on résout le système formé par les équations de deux médianes de ABC. (BE) et (AD) en l'occurrence. Il nous faut donc déterminer leurs équations réduites :***

E milieu de [AC] donc E(-0,5 ; 3,5) ;
(BE) : ***y =-3/11 x + 37/11 et (AD) : y = 1,8 x + 0,6***

$$\begin{cases} y=\dfrac{-3}{11}x+\dfrac{37}{11} \\ y=1{,}8x+0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=3 \end{cases} \quad \textbf{donc G(4/3 ; 3)}$$

- ***Soit on sait que le centre de gravité d'un triangle se situe au deux tiers du segment de médiane en partant du sommet*** $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix}=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} -5{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=3 \end{cases}$ **donc G (4/3 ; 3)**

Exercice 4

g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)= 1 - 9x^2$.

1) Soit x un réel, -x possède une image par g et $g(-x) = 1-9(-x)^2= 1-9x^2=g(x)$. Cqfd

2) Coordonnées des points d'intersection de sa courbe avec les deux axes du repère :

- *Avec (Oy) : g(0)=1 donc (0 ;1).*
- *Avec (Ox) : g(x)=0 nous donne deux solutions x= 1/3 et x = -1/3 donc deux points d'intersection : (-1/3 ;0) et (1/3 ;0).*

3) *Quelque soit le réel x, $x^2 \geq 0$ donc $9x^2 \geq 0$ et $1 - 9x^2 \leq 1$; comme g(0) = 1 ,* ***g atteint un maximum de 1 pour x = 0****.*

4) ***Signe de la fonction g*** *: g(x) est un trinôme du second degré qui possède deux racines, il est du signe de -9 à l'extérieur de ses deux racines d'où :*

$f(x)<0 \, pour \; x \in]-\infty;-1/3[\cup]1/3;+\infty[$

$f(x)=0 \, pour \; x \in \{-1/3;1/3\}$ $f(x)>0 \, pour \; x \in]-1/3;1/3[$

5) On note h la fonction définie par : $h(x)=\sqrt{1-9x^2}=\sqrt{f(x)}$ donc h est définie quand f(x) est positive soit ***Dh = [-1/3 ; 1/3]****.*

6) ***Comparaison de l et g****. Soit x un réel, $l(x) -g(x) = -18x+1-1+9x^2=9x^2-18x =9x(x-2)$. Ce trinôme du second degré est positif à l'extérieur de ses deux racines qui sont 0 et 2. Donc :*

$pour \; x \in]0;2[; l(x)-g(x)<0 \, donc \; l(x)<g(x)$; $pour \; x \in \{0;2\}; l(x)-g(x)=0 \, donc \; l(x)=g(x)$

$pour \; x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[\; l(x)-g(x)>0 \, donc \; l(x)>g(x)$

Exercice 5

***p* définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = x^2 - 4x + 1$.**

1) ***Forme canonique*** *: $p(x) = x^2 - 4x + 1=(x-2)^2 - 4+1=$* ***$(x-2)^2 - 3$***

2) ***Variations de p****: Soit a et b deux réels tels que a<b.*

$a<b \Leftrightarrow a-2<b-2$ pour élever au carré il faut distinguer deux cas :

$si \; a-2 \; et \; b-2 \; sont \; deux \; réels \; négatifs \; (a \; et \; b \; dans \;]-\infty;2[\;) \; alors \; (a-2)^2>(b-2)^2$

$donc \; (a-2)^2-3>(b-2)^2-3 \; soit \; p(a)>p(b) \; d'où \; p \; strictement \; décroissante \; sur \;]-\infty;2[.$

$si \; a-2 \; et \; b-2 \; sont \; deux \; réels \; positifs \; (a \; et \; b \; dans \;]2;+\infty[) \; alors \; (a-2)^2<(b-2)^2$

$donc \; (a-2)^2-3<(b-2)^2-3 \; soit \; p(a)<p(b) \; d'où \; p \; strictement \; croissante \; sur \;]2;+\infty[.$

3) On note Cp la courbe de la fonction p que l'on a dessinée ci-dessous.
Pour tout réel m, on considère la droite notée D_m qui contient les deux points suivants :

M_m (m ; 0) et N_m (m-2 ; 1)

a) D_0 : M_0 (0 ; 0) et N_0 (-2 ; 1). D_{-3} : M_{-3} (-3 ; 0) et N_{-3} (-5 ; 1). D_2 : M_2 (2 ; 0) et N_2 (0 ; 1)

b) ***Conjecture graphique*** *: On note que les droites D_m sont parallèles, il semble que :*
Si m< -4,2 alors D_m et Cp n'ont pas de points d'intersection, pour m=-4,2 alors D_m et Cp n'ont qu'un seul point d'intersection et pour m>-4,2, alors D_m et Cp ont deux points d'intersection.

*c**) <u>Equation cartésienne de la droite D_m</u> : x+2y =m dont l'équation réduite est : y =-0,5x+0,5m***

*d) **<u>Discussion par le calcul</u>** :*

On doit trouver pour quelles valeurs de m la fonction p et la fonction affine dont D_m est la courbe, sont éventuellement égales. On étudie pour quelles valeurs de m la différence p(x) – (-0,5x+0,5m) est nulle.
*Soit x un réel, p(x) – (-0,5x+0,5m)=x²-4x+1+0,5x-0,5m = **x²-3,5x+1-0,5m**. Etudions les éventuelles racines de ce trinôme. Son discriminant est Δ=8,25+2m qui s'annule pour m = - 4,125 donc :*

***Si m< - 4,125** alors Δ<0 donc le trinôme p(x) – (-0,5x+0,5m) ne s'annule pas <u>Cp et D_m n'ont pas de point d'intersection</u>.*

***Si m= - 4,125** alors Δ=0 donc le trinôme p(x) – (-0,5x+0,5m) s'annule pour une seule valeur x_0 = 1,75 donc <u>Cp et D_m sont alors sécantes en un seul point dont l'abscisse est 1,75</u>.*

***Si m> - 4,125** alors Δ>0 donc le trinôme p(x) – (-0,5x+0,5m) s'annule pour $x_1 = \frac{3{,}5-\sqrt{8{,}25+2m}}{2}$ et pour $x_2 = \frac{3{,}5+\sqrt{8{,}25+2m}}{2}$ donc <u>Cp et D_m ont deux points d'intersection dont les abscisses sont x_1 et x_2.</u>*

*e) **<u>Coordonnées du point d'intersection</u>** dans le cas où il est unique : (1,75 ; p(1,75)) = **<u>(1,75 ;-2,9375)</u>***