**BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT.**

**SESSION DE MAI 2015**

# MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

**SPÉCIALITÉ**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 7

***Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6***

***La dernière page Annexe est à rendre avec la copie***

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*(Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles !)*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

## EXERCICE 1 Géométrie dans l'espace 5 points

**Commun à tous les candidats**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\Delta$ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.

   a. Démontrer que la droite $\Delta$ est orthogonale au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta$.

   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\Delta$ et du plan (ABC).

3. Soit $P_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $P_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

   a. Démontrer que les plans $P_1$ et $P_2$ sont sécants.

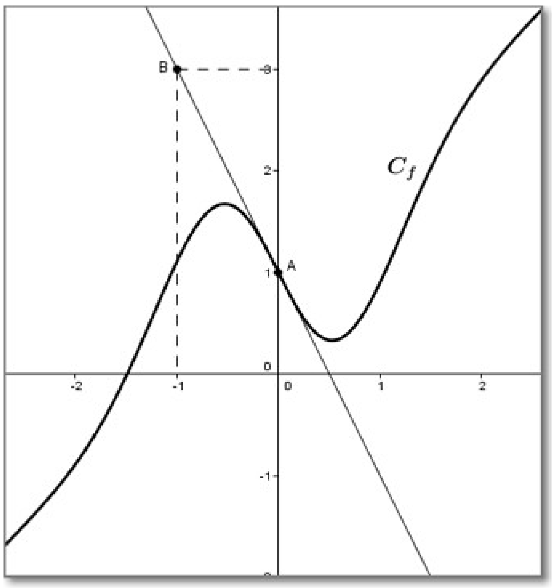
   b. Vérifier que la droite $(d)$, intersection des plans $P_1$ et $P_2$, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   c. La droite $(d)$ et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

## EXERCICE 2 Fonction et calcul intégral 5 points

**Commun à tous les candidats**




Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, une courbe $C_f$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (−1 ; 3).

On désigne par $f$ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $C_f$.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel $a$ tel que pour tout réel $x$

$f(x)=x+1+axe^{-x^2}$.

1. a. Justifier que la courbe $C_f$ passe par le point A.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

   c. Démontrer que pour tout réel $x$,
   $f'(x)=1-a(2x^2-1)e^{-x^2}$.

   d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $C_f$ au point A. Déterminer la valeur du réel $a$.

2. D'après la question précédente, pour tout réel $x$, $f(x)=x+1-3xe^{-x^2}$ et $f'(x)=1+3(2x^2-1)e^{-x^2}$

   a. Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-1;0]$, $f(x)>0$.

   b. Démontrer que pour tout réel $x$ inférieur ou égal à −1, $f'(x)>0$.

   c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ tel que $f(c)=0$.

   Justifier que $c<-\frac{3}{2}+2.10^{-2}$.

3. On désigne par A l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par : $c \leqslant x \leqslant 0$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$

a. Écrire A sous la forme d'une intégrale.

b. On admet que l'intégrale $I = \int_{\frac{-3}{2}}^{0} f(x)\,dx$ est une valeur approchée de A à $10^{-3}$ près.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

## EXERCICE 3 Probabilités 5 points

**Commun à tous les candidats.**

***Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à $10^{-4}$ près. On aura besoin pour certaines questions d'utiliser la calculatrice. Voir l'annexe pour le rappel des instructions.***

### Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les événements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »

C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. a. Montrer que $p(M \cap C) = 0{,}03$ .

b. Calculer $p(C)$ .

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

### Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X .

2. Déterminer $p(X = 35)$ .

3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

### Partie C

1. On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \frac{X}{400}$ , X étant la variable aléatoire de la partie B.

*Rappel : L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence F est l'intervalle* $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ *où :*

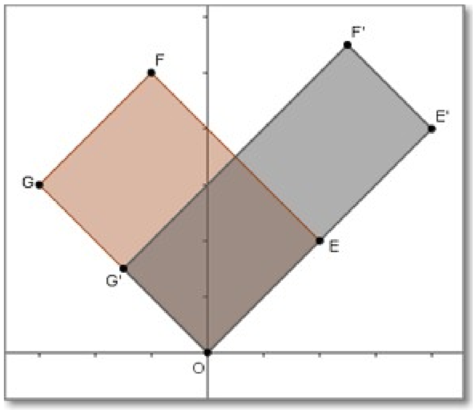
- *a est le plus petit entier tel que* $p(X \leqslant a) > 2{,}5\ \%$
- *b est le plus petit entier tel que* $p(X \leqslant b) \geqslant 97{,}5\,\%$

Déterminer à l'aide de la calculatrice $a$ et $b$ puis l'intervalle de fluctuation de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. On admet que l'intervalle de fluctuation de F est $[0{,}07 ; 0{,}13]$ . Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Qu'en pensez-vous ?

## EXERCICE 4 . 5 points

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**




Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.

Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

**Partie A**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$

Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives (2 ; 2), ( − 1 ; 5) et ( − 3 ; 3).

La transformation du logiciel associe à tout point $\mathbf{M}(x; y)$ du plan le point $\mathbf{M}'(x'; y')$, image du point M tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$$

1. a. Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.

   b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**Partie B**

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.

Une erreur a été commise. Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

| | |
|---|---|
| Entrée | Saisir un entier naturel non nul N |
| Initialisation | Affecter à $x$ la valeur − 1 ; Affecter à $y$ la valeur 5 |
| Traitement | POUR **i** allant de 1 à N<br>Affecter à $a$ la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ ; Affecter à $b$ la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$<br>Affecter à $x$ la valeur $a$ ; Affecter à $y$ la valeur $b$<br>FIN POUR |
| Sortie | Afficher $x$ , afficher $y$ |

2. On a obtenu le tableau suivant :

| **i** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2,5 | 7,25 | 15,625 | 31,8125 | 63,9063 | 2047,9971 | 65535,9999 |
| $y$ | 5,5 | 8,75 | 16,375 | 32,1875 | 64,0938 | 2048,0029 | 65536,0001 |

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

**Partie C**

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG.

On définit la suite des points $\mathbf{E}_n(x_n ; y_n)$ du plan par $\mathbf{E}_0=\mathbf{E}$ et la relation de récurrence :

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, où $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point $\mathbf{E}_{n+1}$.

Ainsi $x_0=2$ et $y_0=2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice $\mathbf{A}^n$ peut s'écrire sous la forme : $A^n=\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\alpha_n=2^{n-1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, le point $\mathbf{E}_n$ est situé sur la droite d'équation $y=x$.

On pourra utiliser que, pour tout entier naturel $n$, les coordonnées $(x_n ; y_n)$ du point $\mathbf{E}_n$ vérifient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

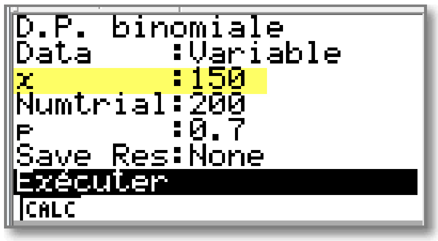
b. Démontrer que la longueur $\mathbf{OE}_n$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Annexe pour l'exercice 3

### Utilisation de la calculatrice dans le cadre de la loi binomiale

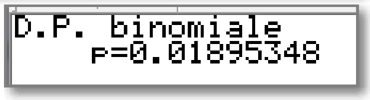
MENU → STAT → DIST →BINM

► l'instruction Bpd , réglage ci-contre,

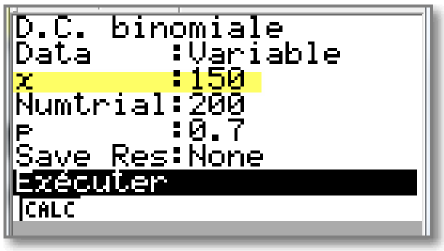



permet de calculer $p(\mathbf{X}=x)$ quand on entre $x$ .

Exemple ci-contre, avec la loi $\mathbf{B}(200\,;0{,}7)$ , pour calculer $p(\mathbf{X}=150)$ , on obtient $p(\mathbf{X}=150)\approx 0{,}01895$

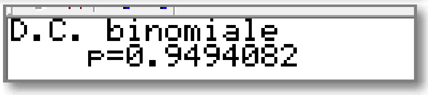



► l'instruction Bcd , réglage ci-contre,



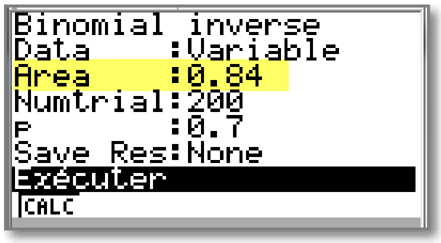

permet de calculer $p(\mathbf{X}\leqslant x)$ quand on entre $x$ .

Exemple ci-contre, avec la loi $\mathbf{B}(200\,;0{,}7)$ , pour calculer $p(\mathbf{X}\leqslant 150)$ , on obtient $p(\mathbf{X}\leqslant 150)\approx 0{,}9494$



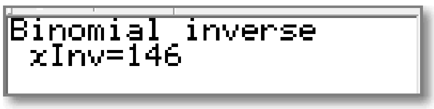

► l'instruction InvB , réglage ci-contre,

permet de déterminer le plus petit entier $x$ tel que $p(\mathbf{X}\leqslant x)>Area$ quand on entre la valeur souhaitée .




Exemple ci-contre, avec la loi $\mathbf{B}(200\,;0{,}7)$ , pour calculer $p(\mathbf{X}\leqslant x)>0{,}84$ , on obtient $x=146$

(même procédure pour $p(\mathbf{X}\leqslant x)\geqslant 0{,}84$ ),




☺**Penser à vérifier avec l'instruction Bcd .**