BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT.

SESSION DE MAI 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

La dernière page Annexe est à rendre avec la copie

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

(Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles !)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Géométrie dans l'espace 5 points

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $\mathbf{A}(0;4;1)$, $\mathbf{B}(1;3;0)$, $\mathbf{C}(2;-1;-2)$ et $\mathbf{D}(7;-1;4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.

   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathbf{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathbf{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

   a. Démontrer que les plans $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ sont sécants.

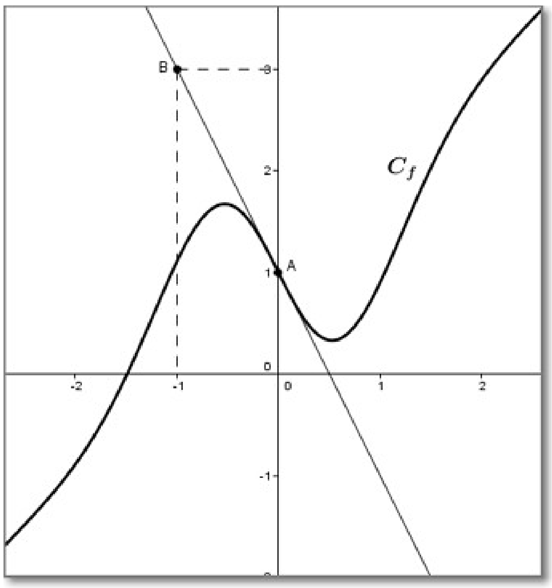
   b. Vérifier que la droite (d), intersection des plans $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

   c. La droite (d) et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

EXERCICE 2 Fonction et calcul intégral 5 points

Commun à tous les candidats



Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$, une courbe C_f et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (−1 ; 3).

On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est C_f.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x
$f(x)=x+1+axe^{-x^2}$.

1. a. Justifier que la courbe C_f passe par le point A.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

   c. Démontrer que pour tout réel x,
   $f'(x)=1-a(2x^2-1)e^{-x^2}$.

   d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe C_f au point A. Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x, $f(x)=x+1-3xe^{-x^2}$ et $f'(x)=1+3(2x^2-1)e^{-x^2}$

   a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1;0]$, $f(x)>0$.

   b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à −1, $f'(x)>0$.

   c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ tel que $f(c)=0$.

   Justifier que $c<-\frac{3}{2}+2.10^{-2}$.

3. On désigne par A l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par : $c \leqslant x \leqslant 0$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$

a. Écrire A sous la forme d'une intégrale.

b. On admet que l'intégrale $I = \int_{\frac{-3}{2}}^{0} f(x)\,dx$ est une valeur approchée de A à 10^{-3} près.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

EXERCICE 3 Probabilités 5 points

Commun à tous les candidats.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près. On aura besoin pour certaines questions d'utiliser la calculatrice. Voir l'annexe pour le rappel des instructions.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les événements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »

C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. a. Montrer que $p(M \cap C) = 0{,}03$.

b. Calculer $p(C)$.

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X .

2. Déterminer $p(X = 35)$.

3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Partie C

1. On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \frac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la partie B.

Rappel : L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence F est l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ *où :*

- *a est le plus petit entier tel que* $p(X \leqslant a) > 2{,}5\ \%$
- *b est le plus petit entier tel que* $p(X \leqslant b) \geqslant 97{,}5\,\%$

Déterminer à l'aide de la calculatrice a et b puis l'intervalle de fluctuation de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. On admet que l'intervalle de fluctuation de F est $[0{,}07 ; 0{,}13]$. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 4 . Suites 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n>1$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	***Soit un entier naturel non nul n***
Initialisation	***Affecter à u la valeur 2***
Traitement et sortie	***POUR i allant de 1 à n*** ***Affecter à u la valeur*** $\dfrac{1+0{,}5u}{0{,}5+u}$ ***Afficher u*** ***FIN POUR***

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n=3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n=12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n\neq 1$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Annexe pour l'exercice 3

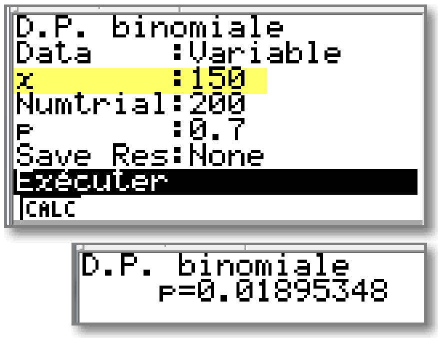
Utilisation de la calculatrice dans le cadre de la loi binomiale

MENU → STAT → DIST →BINM

► l'instruction Bpd , réglage ci-contre,

permet de calculer $p(\mathrm{X}=x)$ quand on entre x .

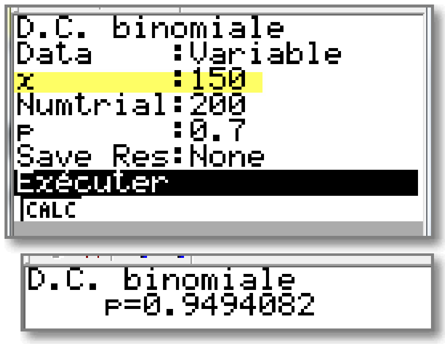
Exemple ci-contre, avec la loi $\mathrm{B}(200\,;0{,}7)$, pour calculer $p(\mathrm{X}=150)$, on obtient $p(\mathrm{X}=150)\approx 0{,}01895$



► l'instruction Bcd , réglage ci-contre,

permet de calculer $p(\mathrm{X}\leqslant x)$ quand on entre x .

Exemple ci-contre, avec la loi $\mathrm{B}(200\,;0{,}7)$, pour calculer $p(\mathrm{X}\leqslant 150)$, on obtient $p(\mathrm{X}\leqslant 150)\approx 0{,}9494$

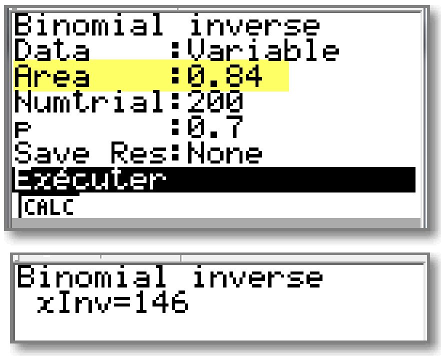


► l'instruction InvB , réglage ci-contre,

permet de déterminer le plus petit entier x tel que $p(\mathrm{X}\leqslant x)>Area$ quand on entre la valeur souhaitée .

Exemple ci-contre, avec la loi $\mathrm{B}(200\,;0{,}7)$, pour calculer $p(\mathrm{X}\leqslant x)>0{,}84$, on obtient $x=146$

(même procédure pour $p(\mathrm{X}\leqslant x)\geqslant 0{,}84$),



☺Penser à vérifier avec l'instruction Bcd .