BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT.

Vendredi 29 janvier 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 7

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3

Exercice 1 : Restitution organisée de connaissances (3 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$.

1. Rappeler l'expression de la fonction densité f associée à cette variable aléatoire.

2. *On rappelle dans cette question que l'espérance mathématique associée à la variable aléatoire* X, *notée* E(X), *est donnée par l'aire comprise entre les droites d'équation* $\boldsymbol{x = a, x = b}$, ***l'axe des abscisses*** *et* ***la courbe associée à la fonction*** $\boldsymbol{x \to xf(x)}$
   Démontrer que E(X) = $\frac{a+b}{2}$

3. Application :
   Le temps d'attente pour obtenir un ticket au multiplexe d'Alès, exprimé en minutes, est une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$.
   On sait que le temps moyen d'attente est de 8 minutes et que seules 25% des personnes attendent moins de 5 minutes.
   En déduire les valeurs de a et de b.

Exercice 2 : Vrai ou Faux (4 points)

1. L'équation $\mathbf{ln}(x)+\mathbf{ln}(x+\mathbf{1})=\mathbf{ln}(\mathbf{2})$ admet le réel 1 pour unique solution.

2. Soient $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ deux suites de nombres réels de termes généraux $\boldsymbol{u_n}$ et $\boldsymbol{v_n}$
   Si la suite $(\boldsymbol{u_n v_n})$ diverge alors les suites $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ divergent.

3. On considère les nombres complexes $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -4i$
   Alors l'écriture algébrique de $\frac{{z_1}^2}{\overline{z_2}}$ est : $\boldsymbol{-1,5 - 1,25i}$

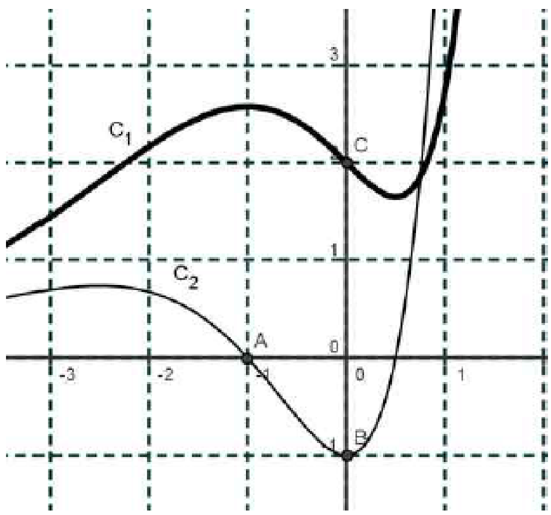
4. Une maladie atteint 1% d'une population donnée.
   Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :
   - Chez les individus malades, 99% des tests sont positifs, les autres étant négatifs.
   - Chez les individus non malades, 98% des tests sont négatifs, les autres étant positifs.

   Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.
   Que pensez-vous de l'affirmation suivante :
   « Sachant que le test est positif, il y a 2 chances sur 3 que l'individu testé ne soit pas malade » ?

Exercice 3 (3 points)

Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On sait que l'une des fonctions est la dérivée de l'autre.
On note ces fonctions g et g'.
La fonction g est définie par $g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ où *a, b et c* sont trois nombres.

Déterminez *a, b et c*.



Exercice 4 (5 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2lnx$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α sur l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{lnx}{x^2}$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

5. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$.

Exercice 5 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).