MATHEMATIQUES

-SERIE S-

SPÉCIALITÉ

DUREE DE L'EPREUVE : 4 heures

Matériel autorisé : Calculatrice graphique programmable

(Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles !)

Les candidats doivent traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

- Ce sujet comporte 4 pages –

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
   b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.
   c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
   d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
3. **Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}**
   L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.
   Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

Exercice 2 **5 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$
et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On donne les points $A(1~;~1;~0)$, $B(3~;0~;-1)$ et $C(7~;1~;-2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t \\ z = -2+t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Proposition 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :
La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées $(8~;-3;~-4)$.

Proposition 5 :
Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. **a.** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

   Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.
2. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

— il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;

— la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.

Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.

En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

   b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

   c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.

   Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

   b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n,

$$Y_{2n} = 2^n Y_0.$$

   En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

   a. On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

   Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

   b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.