TS **Bac Blanc Mai 2018**

Sujet pour les élèves n'ayant pas suivi la spécialité Mathématiques

(4 heures)

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

EXERCICE 1 : (*5 points*) *Commun à tous les candidats*

Un maraicher est spécialiste dans la production de fraises. Cet exercice envisage dans la **partie A** la production de fraises, et dans la **partie B** leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraicher produit ses fraises dans deux serres notées A et B; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 : La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 : On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes.

La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut-être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ .

1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

b. Démontrer que : $P(Y \leq \dfrac{-13}{\sigma}) = 0,14$.

c. En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par ***n*** et ***m*** deux nombres entiers.

a. Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250-n\ ;\ 250+n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

EXERCICE 2 : (4 points) *Commun à tous les candidats*

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre réel compris entre 0 et 1. f_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f_a(x) = ae^{ax} + a}$$

On note $I\,(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 : $I(a) = \int_0^1 f_a(x)dx$

1. On pose dans cette question $\boldsymbol{a = 0}$. Déterminer $I\,(0)$.

2. On pose dans cette question $\boldsymbol{a = 1}$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^x + 1$.

a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaitre le nombre $I\,(1)$.

b. Calculer la valeur exacte de $I\,(1)$, puis arrondir au dixième.

3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $I\,(a)$ est égale à 2 ? Justifier avec rigueur.
Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 3 : (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation (E) :

$$\mathbf{z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0}$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de l'équation (E).

2. Démontrer que cette équation ne possède pas de solution imaginaire pure.

3. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$\mathbf{z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)}\ .$$

4. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

5. Montrer que la somme des solutions est égale à leur produit.

6. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé. ABCD est-il un losange ? Justifier

EXERCICE 4 : (6 points) *Commun à tous les candidats*

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant :
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se pose la question suivante :

Au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg ?

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Premier modèle : une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante : $u_0=1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}2u_n-100$.

1. a. Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.

b. A l'aide de la calculatrice, donner une réponse à la question que se pose l'entreprise.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire l'expression de u_n, en fonction de n puis déterminer la limite de (u_n).

c. Répondre à la question posée par l'entreprise.

Partie B : Second modèle : une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(t)=\dfrac{50}{1+49e^{-0{,}2t}}$

où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t exprimé en jours.

1. a. Calculer $f(0)$.

b. Démontrer que, pour tout réel $t > 0$, $f(t)<50$.

c. Etudier le sens de variation de la fonction f.

d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

3. En utilisant ce modèle, répondre à la question posée par l'entreprise.