TS	**Bac Blanc Janvier 2018** **Sujet pour les élèves n'ayant pas suivi la spécialité** (4 heures) *Seule l'utilisation d'une calculatrice en mode examen est autorisée*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Exercice 1 : **(3 points)**
Restitution Organisée de Connaissances

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=e^x-x$.

a) Montrer que la fonction *f* est croissante sur [0 ; +∞[.

b) En déduire que : si $x\geq 0$ alors $e^x\geq x+1$.

c) En déduire la limite de la fonction exponentielle en + ∞.

d) En posant $X=-x$; montrer que l'on peut déduire de la limite précédente, le comportement de la fonction exponentielle en - ∞.

Exercice 2 : **(2 points)**
Vrai ou Faux.

Les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez soigneusement.

1°) Avec $z_1=2-3i$ et $z_2=1+i$, la partie imaginaire de $\frac{z_1^2}{-z_2}$ est $\frac{-17}{2}$.

2°) On considère la suite de nombres complexes définie par $z_0=i$ et $z_{n+1}=1-\frac{1}{z_n}$ pour tout entier naturel n. On a $z_3=i$.

Exercice 3 : **(6 points)**

On considère la fonction numérique *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^x+\frac{x^2}{2}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

Partie A : ***Conjecture.***

A l'aide de votre calculatrice conjecturez le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites en -∞ et en +∞.

Partie B : ***Étude d'une fonction intermédiaire.***

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+2)e^x+1$

1°) Calculez $g'(x)$ et étudiez son signe suivant les valeurs de *x*.

2°) Dressez le tableau de variations de la fonction g. *(les limites ne sont pas à justifier)*

3°) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de *x*.

Partie C : ***Étude de la fonction f.***

1°) Montrez que pour tout *x* réel, $f'(x)=xg(x)$

2°) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3°) Déterminez les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

<u>Partie D :</u> ***Étude d'une tangente à la courbe de f.***

Soit T_1 la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse 1.
Déterminez les coordonnées du point d'intersection de T_1 avec l'axe des ordonnées.

<u>Exercice 4 :</u> (4 points)
Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut-être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A
Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96% de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60% de la production journalière
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98%

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1) Construire un arbre que vous compléterez au fur et à mesure des questions.
2) Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
3) Justifier que p(B ¿ V) = 0,372 et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
4) Un technicien affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B.

A-t-il raison ?

Partie B
On rappelle que 96% de la production journalière est vendable.
On prélève maintenant au hasard deux billes dans la production d'un jour donné. La quantité produite est suffisamment importante pour que le prélèvement puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes.
Quelle est la probabilité de n'obtenir qu'une seule bille vendable sur les deux ?

<u>Exercice 5 :</u> (5 points)
Dans un pays de population constante de 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10% des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5% des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année 2010 + n, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année 2010 + n, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0=90$ et $v_0=30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n) :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
...		...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B :
On admet dans cette partie que, pour tout entier n, $u_{n+1}=0,85\ u_n+6$.

1) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $40\leq u_n\leq 90$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on en déduire quant au comportement de la suite (u_n) à l'infini ?

1) On considère la suite (w_n), définie par : $w_n= u_n-40$, pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.

1) Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 2) de la partie A.

2) On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geq 60$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a) Que fait cet algorithme ?

b) Quelle valeur affiche-t-il ?

TS **Bac Blanc Janvier 2018**

Sujet pour les élèves ayant suivi la spécialité

(4 heures)

Seule l'utilisation d'une calculatrice en mode examen est autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Exercice 1 : (3 points)
Restitution Organisée de Connaissances

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=e^x-x$.

a) Montrer que la fonction *f* est croissante sur [0 ; +∞[.

b) En déduire que : si $x\geq 0$ alors $e^x\geq x+1$.

c) En déduire la limite de la fonction exponentielle en + ∞.

d) En posant $X=-x$; montrer que l'on peut déduire de la limite précédente, le comportement de la fonction exponentielle en - ∞.

Exercice 2 : (2 points)
Vrai ou Faux.

Les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez soigneusement.

1°) Avec $z_1=2-3i$ et $z_2=1+i$, la partie imaginaire de $\frac{z_1^2}{-z_2}$ est $\frac{-17}{2}$.

2°) On considère la suite de nombres complexes définie par $z_0=i \;\; et \;\; z_{n+1}=1-\frac{1}{z_n}$ pour tout entier naturel n. On a $z_3=i$.

Exercice 3 : (6 points)

On considère la fonction numérique *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^x+\frac{x^2}{2}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

Partie A : ***Conjecture.***

A l'aide de votre calculatrice conjecturez le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites en -∞ et en +∞.

Partie B : ***Étude d'une fonction intermédiaire.***

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+2)e^x+1$

1°) Calculez $g'(x)$ et étudiez son signe suivant les valeurs de *x*.

2°) Dressez le tableau de variations de la fonction g. *(les limites ne sont pas à justifier)*

3°) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de *x*.

Partie C : ***Étude de la fonction f.***

1°) Montrez que pour tout *x* réel, $f'(x)=xg(x)$

2°) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3°) Déterminez les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

<u>Partie D :</u> *Étude d'une tangente à la courbe de f.*

Soit T_1 la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse 1.
Déterminez les coordonnées du point d'intersection de T_1 avec l'axe des ordonnées.

<u>Exercice 4 :</u> (4 points)
Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut-être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A
Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96% de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60% de la production journalière
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98%

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1) Construire un arbre que vous compléterez au fur et à mesure des questions.
2) Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
3) Justifier que p(B ¿ V) = 0,372 et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
4) Un technicien affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B.

A-t-il raison ?

Partie B
On rappelle que 96% de la production journalière est vendable.
On prélève maintenant au hasard deux billes dans la production d'un jour donné. La quantité produite est suffisamment importante pour que le prélèvement puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes.
Quelle est la probabilité de n'obtenir qu'une seule bille vendable sur les deux ?

<u>Exercice 5 :</u> (5 points)

Partie A : Matrices

1°) Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ où *a* est un réel donné.

a) Calculer M^2 puis M^3

b) Conjecturer une expression de M^n, pour tout entier naturel $n\geq 1.$

c) Prouver cette conjecture.

2°) Est-il vrai que toute matrice carrée non nulle admet une matrice inverse ?

Partie B : Arithmétique

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$, où *a* est un entier naturel non nul ; par exemple $10=9+1^2$; $13=9+2^2$.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2 et de 5.

1°) Étude de l'équation d'inconnue *a* : $a^2+9=2^n$ où $a\in N$, $n\in N$, $n\geq 4$.

a) Montrer que si *a* existe, *a* est impair.

b) En raisonnant en congruence modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2°) Étude de l'équation d'inconnue *a* : $a^2+9=5^n$ où $a\in N$, $n\in N$, $n\geq 2$.

a) En raisonnant en congruence modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si *n* est impair.

b) On pose $n=2p$, où *p* est un entier naturel, $p\geq 1$.

Factoriser 5^n-a^2.

En déduire l'existence d'un unique entier naturel *a* tel que a^2+9 soit une puissance entière de 5.